ISSN: 0214-3402
DOI: http://dx.doi.org/10.14201/aula201622341355

PROCESSOS DE LINGUAGEM E DE INTERAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE DIVISÃO DE FRAÇÕES POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Language processes and the interaction in the fraction division resolution by high school students

María Helena Palma de Oliveira
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
Correo-e: mhelenapalma@gmail.com

Walter Aparecido Borges
Centro Universitário Anhanguera de São Paulo
Correo-e: w53borges@gmail.com

Recepción: 22 de junio de 2015
Envío a informantes: 24 de junio de 2015
Fecha de aceptación definitiva: 28 de marzo de 2016

Resumo: Este estudo descreve e discute processos de linguagem e de interação resultantes de atividade de resolução de divisão de frações de um grupo de estudantes do ensino médio de escola pública da cidade de São Paulo. Em uma perspectiva histórico-cultural, considera as mediações pela linguagem e pela interação social, concretizadas nos diálogos que ocorreram durante a resolução, como constitutivos do próprio pensamento matemático. Os processos de linguagem expressos nos diálogos entre os participantes evidenciaram dificuldades marcadas por explicações repetitivas e mecanicistas e baixo nível de conhecimento matemático retrospectivo, entretanto e principalmente, criaram possibilidades, em graus diferenciados para os participantes, de movimento e mudança em relação ao entendimento matemático do conteúdo de divisão de frações, pressuposto para a resolução de potências com base racional (frações) e expoente negativo.

Palavras-chave: potenciação de números racionais; expoente negativo; mediação; linguagem e interação social; aprendizagem matemática.

Abstract: This study describes and discusses the language processes and interactions that occur with a group of students in high school of a public school in the city of São Paulo during a activity resolution of fractions division. A historic-cultural perspective considers the mediation through the language and the social interaction that happened through the dialogs during the resolution as constitutive of the mathematical reasoning. The language processes expressed on the dialogues between the participants showed the difficulties marked by repetitive and mechanical explanations, and the poor mathematical background. Nevertheless, and most importantly, created possibilities, in different levels for the participants, of movement and chance in comparison to the mathematical comprehension of fractions division content, required to the resolution of potentiation of rational base and negative exponent.

Key words: potentiation of rational numbers; negative exponent; mediation through language; social interaction; mathematical learning.

Resumen: En este estudio se describe el análisis llevado a cabo sobre procesos de lenguaje y de interacción resultantes de la resolución de actividad relacionada con la división de fracciones hecha por estudiantes de un grupo de secundaria de escuela pública de São Paulo. En una perspectiva histórico-cultural, se ha tenido en cuenta que las mediaciones del lenguaje y de la interacción social implementadas en los diálogos que tuvieron lugar durante la resolución son elementos constitutivos del propio pensamiento matemático. Los procesos de lenguaje expresados en los diálogos entre los participantes pusieron en evidencia dificultades caracterizadas por explicaciones mecanicistas y repetitivas y bajo nivel de conocimiento matemático previo. Sin embargo, se hace hincapié en la creación de posibilidades, en diferentes grados para los participantes, de movimiento y cambio de la comprensión matemática del contenido de división de fracciones necesario para la resolución de potencias con base racional (fracciones) y exponente negativo.

Palabras clave: potenciación de números racionales; exponente negativo; mediación; lenguaje e interacción social; aprendizaje de las matemáticas.

1. Introdução

Este trabalho descreve e analisa os processos de linguagem e de interação resultantes da atividade de resolução de problema com divisão de frações, pressuposto para a resolução de potências com base racional (frações) e expoente negativo, envolvendo alunos de 1º ano do Ensino Médio de escola pública da cidade de São Paulo.

Fundamenta-se nos trabalhos de Lev Vigotski, na abordagem da relação indissociável entre pensamento e linguagem e da interação social nos espaços da aprendizagem (Zona de Desenvolvimento Proximal, ZDP) e em alguns conceitos de Mikhail Bakhtin, na abordagem da interação verbal: enunciação (tema, significação e réplica).

O foco do estudo sobre a linguagem não significa considerá-la produtora do conhecimento. Radford (2011: 157) afirma que a linguagem não pode «criar os objetos teóricos do mundo do indivíduo», os significados das palavras e dos símbolos têm uma história cultural, calcada nas atividades dos indivíduos e neles cristalizada. Embora não negue a importância da linguagem na construção do conhecimento, Radford (2011) faz a seguinte crítica:

> Parece-me que reificar palavras e discursos seria esquecer que o objeto do conhecimento, o sujeito que o produz e a relação entre ambos estão todos subordinados a uma

rede muito mais ampla de significados históricos e culturais do que se supunha inicialmente (Radford, 2011: 157).

Coerente com a perspectiva de Radford (Moretti, Panosian & Moura, 2015), considera-se o saber matemático dos participantes deste estudo uma potencialidade cultural, atualizada pelas práticas culturais; o conhecimento como a atualização do saber e a aprendizagem como tomada de consciência dos modos como se atualiza o saber. Nessa perspectiva, os fundamentos teóricos de Lev Vigotski e de Mikhail Bakhtin são essenciais para o desenvolvimento deste estudo e para o entendimento da aprendizagem matemática (Oliveira Borges, 2013), uma vez que se entende a palavra que concretiza o discurso, na resolução da atividade proposta, como signo social, instrumento da consciência (Bakhtin/Volochinov, 2006), pois a relação entre pensamento e palavra é produto da interação das forças sociais (Vygotsky, 2000).

2. Processos de linguagem e de interação

A concepção inicial que orienta este estudo vincula-se à natureza mediada do pensamento. Considera-se a função fundamental dos artefatos culturais na realização das práticas sociais e a linguagem como o principal artefato cultural. Segundo Radford (2011: 316), «artefatos nem são apenas auxiliares do pensamento e nem simples amplificadores, mas sim partes constitutivas e consubstanciais do pensamento».

O pensamento verbal surge da sobreposição, em determinada região, das funções pensamento e linguagem por meio da junção entre o pensamento e a fala (Vygotsky, 2000). Essa região não contempla todas as formas de pensamento ou de fala, existe uma vasta área que não preserva nenhuma relação direta com pensamento verbal: uso de instrumentos, pensamento prático em geral; linguagem não intelectual, fala lírica, fala recitada por memorização.

Para Vygotsky (2000), o aspecto interno da palavra, o significado é a unidade do pensamento verbal. Por meio do significado da palavra, unem-se pensamento e discurso, como funções indissociáveis. O significado da palavra surge primeiro entre as pessoas, nas relações interpessoais, com outros que dominam o entendimento da palavra e depois surge no plano intrapessoal, individual. «Em primeiro lugar, aparece no plano social e depois no plano psicológico» (Wertsch, 1988: 77-78).

A apropriação do significado da palavra tem duplo movimento, dupla formação (plano social e plano individual) e é a base do entendimento de outros dois conceitos essenciais da teoria de Vigotski que têm relação direta com a aprendizagem: Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) e formação de conceito.

A internalização é o mecanismo responsável pela transição entre o funcionamento intermental e o funcionamento intramental. A internalização permite a reconstrução interna de uma atividade externa e é o aspecto fundamental para o entendimento da relação entre aprendizagem (plano interpessoal: interação social) e desenvolvimento (plano intrapessoal). O espaço para esse movimento é definido como ZDP, que corresponde à distância entre o nível de desenvolvimento real –capacidade de resolver problemas de modo independente– e o nível de desenvolvimento potencial, capacidade de resolver problemas com a ajuda, orientação e colaboração de outras pessoas mais preparadas para a tarefa (Vygotsky, 2000).

O significado, o conceito contido em uma palavra, é um ato de generalização, porque não existe significado por trás do qual não haja um processo elaborado pelo pensamento de generalização (Vygotsky, 2000). A generalização para Vigotski (2000: 372) «é um ato do pensamento propriamente conceitual (semântico) que reflete a realidade de modo bastante diferente de como esta é refletida nas sensações e nas percepções imediatas». Ela classifica um objeto e o agrupa com outros elementos da mesma categoria; ainda permite a diferenciação de elementos de outras categorias. Sannino (2011: 10), referenciando Davidov, discípulo de Vigotski, afirma que pensar e aprender «significa generalizar, ou seja, abstrair significado de um conjunto inicial difuso».

A generalização é um recurso do pensamento verbal, pois todo significado da palavra é um discurso, é da natureza da palavra o fato de ter significado. Sem significado, a palavra é um som vazio (Vigotski, 2010). A generalização constitui-se como processo de formação de conceitos, ou seja, um processo complexo que envolve todas as funções intelectuais básicas que são indispensáveis (Vygotsky, 1993: 50).

Segundo Bakhtin/Volochinov (2006), a verdadeira substância da língua é constituída pelo fenômeno social da interação verbal que se realiza na enunciação e não por um sistema abstrato de formas linguísticas; em decorrência, a forma mais importante de interação verbal é o diálogo.

Bakhtin/Volochinov (2006) diferencia língua e enunciado. Língua expressa o significado dicionarizado e o enunciado expressa o sentido, o significado em um contexto. A palavra está presente em todos os atos de compreensão e em todos os atos de interpretação, por isso é um fenômeno ideológico, porque é permeável a qualquer função ideológica específica. A palavra é um signo social constituído nas relações sociais e alimenta a consciência individual. O signo cultural é apropriado verbalmente pela consciência, que assim, constitui-se verbalmente. «Ela é determinada tanto pelo fato de que procede de alguém, como pelo fato de que se dirige para alguém» (Bakhtin/Volochinov, 2006: 113). É um produto da interação do locutor e do ouvinte. A fala transforma a palavra em ato, em enunciação. A situação e os participantes determinam a enunciação.

A enunciação tem um sentido único e definido, próprio de um contexto específico, que faz sentido somente no momento da ocorrência. A enunciação comporta, de modo inter-relacional, o tema e a significação. O tema constitui o estágio superior real da capacidade linguística de significar, é o significado contextual; «a significação é o estágio inferior da capacidade de significar» (Bakhtin/Volochinov, 2006: 131), no sistema da língua, ou da palavra dicionarizada.

O sentido da enunciação completa é o tema, que é determinado também pelos elementos não verbais da situação, como expressões faciais, gestos, além das formas linguísticas, que o compõe como as palavras, as formas morfológicas ou sintáticas, os sons, as entoações, por ser contextual não pode ser segmentado, é irredutível à análise.

A significação presenta na enunciação, «é apenas um potencial, uma possibilidade de significar no interior de um tema concreto» (Bakhtin/Volochinov, 2006: 131). A enunciação permite compreender a manifestação do discurso como tema e como significação e, ainda, permite configurar as articulações dos discursos por meio de elementos verbais e não verbais.

Para este estudo, a enunciação presente nos diálogos propiciados pela resolução da atividade constituiu, em cada momento, o tema possível no contexto em que ocorreu o diálogo. A significação que compôs a enunciação constituiu-se como potencial de significar no sistema mais amplo do saber matemático, composto por elementos abstratos, resultantes de uma convenção, por isso, reiteráveis e idênticos cada vez que são repetidos.

O diálogo é a essência do entendimento da enunciação, por isso, também é preciso considerar o acento apreciativo como elemento que institui a enunciação e que expressa uma posição do sujeito em relação ao objeto e ao enunciado do outro (Bakhtin/Volochinov, 2006). Um enunciado dependente das condições de sua produção, da situação concreta de seus interlocutores, de tempo e de espaço. O discurso é sempre reelaborado e renovado, pois quem fala carrega vozes sociais e antecipa a fala do outro (réplica), prevenindo objeções, questionamentos perguntas na busca de uma compreensão ativa.

É importante enfatizar a importância das contribuições teóricas de Vigotski e de Bakhtin, pois, para os teóricos, a linguagem, a palavra e a interação social são fatores determinantes na compreensão da ação humana, e neste caso especifico, da aprendizagem matemática.

3. Método

A atividade foi planejada para provocar a interação entre os participantes. Realizada logo após o período normal de aulas, teve duração de 50 minutos. Envolveu 10 estudantes regulares voluntários do 1º ano do Ensino Médio de escola estadual da zona Norte de São Paulo, com idade média de 15 anos, organizados em grupos de 3 e 4 elementos.

A pesquisa foi autorizada pela Comissão de Ética institucional. Os responsáveis pelos estudantes assinaram Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Gravadores portáteis de áudio e câmaras de vídeo foram utilizados para registrar os diálogos.

Os conteúdos de potências com base racional (frações) e expoente negativo iniciam-se com expressões que os alunos deveriam apresentar algum domínio, pois são do nível de Ensino Fundamental. A resolução foi acompanhada e orientada pelo Pesquisador (P), também é professor de Matemática dos participantes.

A unidade de análise considerada foi o acontecimento (Bardin, 1995), aqui denominado episódio de ensino que pode ser caracterizado como um segmento do processo de resolução da atividade. O início de um episódio é um novo desafio representado por um tópico a ser resolvido na atividade e o término ocorre quando o foco de interesse na resolução passa para outro aspecto ou tópico do conteúdo.

4. Resultados e Discussões

A transcrição a seguir resultou de gravações de áudio e vídeo da atividade realizada. Os participantes foram identificados somente pelas iniciais do primeiro nome e o Pesquisador ficou identificado como P.

No episódio, os participantes desenvolveram atividades de divisão de frações, como condição para a resolução de potências com base racional $\frac{2}{3}$. O que se esperava dos participantes da pesquisa era que preenchessem o quadro:

x	2^x	$\left(\frac{2}{3}\right)^x$	2^{-x}	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$
0				
1				
2				
-1				
-2				

Participaram desse episódio 10 estudantes CR, D, F, Fe, J, K, MM, Th, V e O. Com exceção de K, todos os demais sempre estudaram em escolas públicas. P apresentou a atividade impressa e pediu que fizessem a resolução, convidando os estudantes para que viessem à lousa. O Quadro 1 traz a transcrição do episódio.

Quadro 1: Episódio - Atividade com divisão de frações

A participante K escreveu no quadro a multiplicação entre frações $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$, explicando que multiplicava em «x».

[1] P: *E como é que viu? Por que multiplicou em «x» e deu $\frac{3}{2}$? O que você multiplicou primeiro?*
[2] K: *O um pelo três e o dois pelo um.*
[3] P: *E por quê?*
[4] K: *Por quê? (sorri) Ah, P! Aí* complica.
[5] P: *Por que não fez o um pelo dois ali?* (referindo-se ao quadro)
[6] K, gesticulando, girando os braços, diz algo incompreensível, que segundo ela mesma, significava inverter.
[7] LT: *Por que o um vem primeiro* (interfere LT).
[8] P: *Por que o um está em cima?*
[9] LT: *Não, por que o um vem na frente. Essa que é a dúvida, P, qual a gente faz primeiro?*
[10] P: É, *no lugar que tá escrito... Você poderia... dois elevado e menos um sobre três a menos um. N*ão foi isso que você fez?
(K começa a escrever essa expressão $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$).
[11] LT: *Não, K! Ele está perguntando por que você não fez ali em baixo, você não fez um vezes três...*
[12] P: *Mas deixa ela fazer, ela estava fazendo ali...*
(referindo-se à escrita no quadro $\frac{2^{-1}}{3^{-1}}$).
[13] K, oscilando a mão sobre os parênteses já grafados no quadro: *Por que estão nos parênteses, assim.*
[14] LT: *K, ele tá perguntando assim ó, você fez um vezes três e deu três, e dois vezes um deu dois. Se você fizesse dois vezes um daria dois.*
[15] P: *Não! N*ão *dois vezes um, dois elevado a menos um*.
[16] LT: *Não, na conta.*

[17] P: *É, no «x» ali... mas voltando lá, isso aí dá confusão. Essa história de multiplicar em «x». Depois vamos ver porque. Ela tirando dos parênteses não dá dois elevado a menos um? Escreve lá, K, o que você estava escrevendo, sobre?*
[18] K: *Três elevado a menos um.*
[19] P: *Você sabe o resultado? Quem vai em cima? Isso é igual? Em cima é?*
[20] K: *Meio.*
[21] P: *Isso! Sobre?*
[22] K: *Um terço* (escrevendo $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$).
[23] P: *Então, como é que divide essa fração aí?*
[24] K gesticula com os ombros, sinalizando que não sabe e sorri.
[25] P: *Alguém explica?* (virando-se para o grupo). *Como é que se divide um meio dividido por um terço?*
[26] LT: *Você cancela o de cima... o um com... o um do meio com um terço e joga dois sobre três.*
[27] P: *Será que cancelar é uma boa?*
[28] K: *Tira um do meio, vezes um terço?*
[29] MM explica: *Um meio vezes três sobre um.*
[30] K: (escrevendo $\frac{1}{2}\times\frac{3}{1}$). *Assim?*
[31] P: *Igual...*
[32] K escreve, completando $\frac{1}{2}\times\frac{3}{1} = \frac{3}{2}$.
[33] P: Resposta. *E aí você não tem como...*
[34] K: (dirigindo-se à MM): *Obrigada!*
[35] P: *Bom! A K fez e eu imagino que ela tenha entendido.*
[36] K: *Agora sim.*
[37] LT: *Tá! Agora me explica.*
[38] P: *Os demais participantes entenderam?*

Ao analisarmos os pontos mais significativos dos diálogos, isto é, o que é mais denso e menos repetitivo, podemos destacar o momentos em que a participante K escreveu a expressão incorreta $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ e apresentou como resultado a fração $\frac{3}{2}$. Diante dessa ocorrência, P perguntou a K, conforme transcrito em [1] P: «E como é que viu? Por que multiplicou em "x" e deu $\frac{3}{2}$? O que você multiplicou primeiro?».

P buscou a justificativa matemática de K para o que fizera. A divisão entre duas frações não é uma tarefa trivial, necessita de muitas justificativas matemáticas. Por isso, era compreensível que K hesitasse na resolução dessa tarefa, ainda que esse conhecimento fosse esperado de uma aluna do Ensino Médio.

O contexto no qual se deu a resolução de K estava marcado de informações sobre a sua dúvida tais como os olhares, gestos, titubeios.

Na fala de P: «E como é que viu? Por que multiplicou em "x" e deu $\frac{3}{2}$? O que você multiplicou primeiro?». P esperava que K esclarecesse a resolução $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{3}{2}$.

A resposta de K [2]: «O um pelo três e o dois pelo um» baseou-se em uma orientação espacial na operação $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$. Ela escrevera a resolução antes no quadro. Essa operação, a multiplicação em «x», ou em cruz, à qual os alunos recorreram é confusa para esse caso. Pode ser usada na determinação do valor da quarta proporcional, isto é, um valor que mantenha a proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$; $ax = bc$; $x = \frac{bc}{a}$, de maneira que aplicá-la para a divisão entre frações é uma estratégia inadequada e pode causar erros, quando não se tem o entendimento das justificativas.

Nessa situação, a voz de K poderia estar sendo influenciada por práticas escolares de resolução repetitivas e mecânicas, de anos anteriores, próprias do tecnicismo mecanicista que «procura reduzir a matemática a um conjunto de regras e algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los» (Fiorentini, 1995: 3). A abordagem pedagógica tecnicista (Saviani, 2008) é criticada por dar ênfase à reprodução do conhecimento, valorizando o treinamento e a repetição como garantia à assimilação de conteúdos. Caracteriza-se pelo ensino de técnicas (algoritmos) vazios de significados e representa uma forma de trivializar o ensino da matemática (Gascón, 2001). Nessa modalidade, ensinar é apresentar «técnicas» aos alunos e aprender é saber utilizar essas «técnicas».

K evidencia que o conceito de divisão de frações, nesse momento do diálogo, ainda está em formação, está sendo construído por aproximações e por meio de mediações com seus conhecimentos anteriores.

A pergunta de P revela um desacordo com a resposta de K. Para ele, que detém o saber matemático necessário à resolução da divisão de frações, a explicação de K é ambígua, pois admite contraexemplos para o caso da «multiplicação em x». É possível uma interpretação dessa fala de K com outro resultado, «ainda que seja multiplicando em x», bastando para isso inverter as posições dos produtos obtidos. Ao que parece, para K, o conceito científico associado à divisão de frações ainda não se formou, os conhecimentos retrospectivos de K parecem não servir de mediadores. Por isso, a pergunta de P fez K reagir surpreendida, e repetir a pergunta de P em [4] K: «Por quê? (sorri) Ah, P! Aí complica».

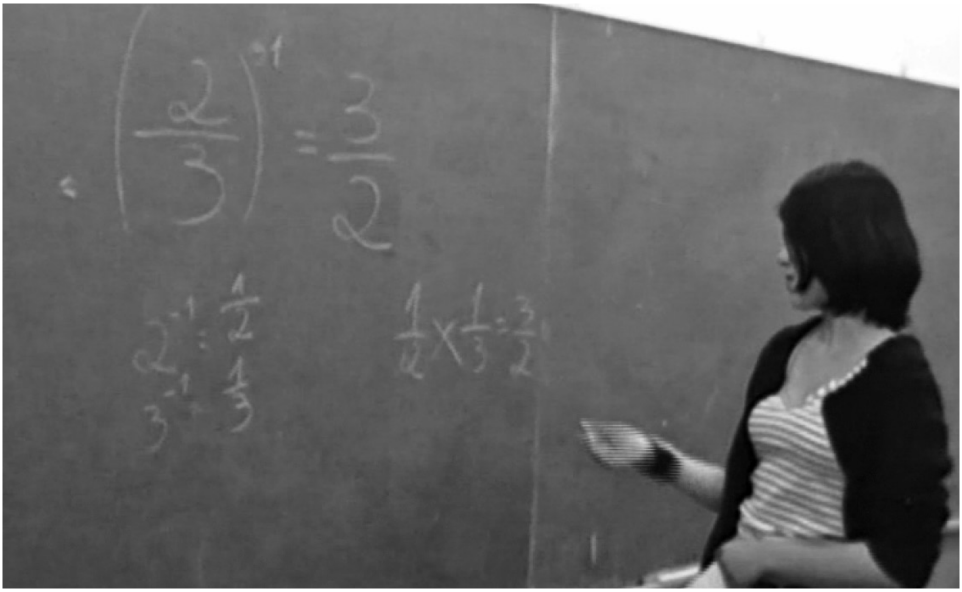
A resposta de K era até certo ponto esperada, dadas as circunstâncias da resolução da atividade que não foi feita isoladamente por K, mas em conjunto com os demais participantes. A resolução era a possível também para o grupo, pois «conhecimentos» disponíveis pareciam estar condicionados as mesmas práticas escolares sem fundamento matemático. Essa situação dificultava o avanço da aprendizagem, porque os colegas não eram, matematicamente, mais experientes na tarefa; por isso, as condições de produção da fala de K e do grupo possibilitaram apenas o desenvolvimento da resolução por meio da multiplicação em «x» ou em cruz.

A réplica de K [4] «Por quê? (sorri) Ah, P! Aí, complica» expressa a assimetria entre seu discurso interior e a pergunta de P. Ela parecia não se arriscar a argumentar a favor da multiplicação em «x», provavelmente porque P está associado ao saber matemático sobre divisão de fração. K não demonstrava ter atingido a generalização necessária à construção do conceito científico.

P perguntou [5] «Por que não fez o um pelo dois, ali?», referindo-se à possibilidade de que a multiplicação poderia ter outro resultado que não o encontrado. Essa outra possibilidade põe em relevo a ambiguidade do processo de resolução sem fundamento matemático. P queria saber se K percebeu essa ambiguidade, ou se para ela a resolução estava correta.

A participante K gesticulou com os braços, girando-os sobre as frações escritas no quadro, como se quisesse iniciar um giro em uma das frações diante da expressão em [6], tentando explicar porque multiplicou 1x3, em sua «multiplicação em x» (Fig. 1).

Figura 1: Multiplicação em «x»



Fonte: Arquivo pessoal.

O gesto de K tinha o sentido de fazer girar, no entanto referia-se às duas frações com o mesmo gesto, não deixando claro se havia uma opção de giro pela fração dividendo ou pela fração divisora. A estratégia gestual baseou-se na ideia de inverter, embora K não dominasse, naquele momento, o conhecimento matemático que poderia sustentar o gesto. Provavelmente, ainda estava confuso para K qual das duas frações deveria «girar».

Tentando explicar como multiplicar em «x» ou em cruz, LT [7] fala: «Porque um vem primeiro». Percebe-se a estratégia de justificar a ação por meio de palavras do cotidiano escolar, de orientação de ordem, recorrendo a uma metáfora vazia de significado matemático. P interroga-os [8]: «Por que o um está em cima?», demonstrando a dúvida de quem é o mais experiente na tarefa e que pretendia incentivar e desafiar K e LT a tentarem uma justificativa. O acento apreciativo da pergunta remete à ênfase dada por P em relação à posição do número 1 que aparece duas vezes como numerador, pois afirmar que «o um vem primeiro» em uma expressão numérica como $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ nada indica.

LT é quem responde [9]: «Não, por que o um vem na frente. Essa que é a dúvida, P: qual a gente faz primeiro?». LT admite a dúvida, talvez percebendo que as justificativas «porque o um vem primeiro» ou «porque o um vem na frente» não eram adequadas. Essa percepção revela um processo em formação, porque, em seguida, diante da pergunta de P, LT recorre à estratégia da orientação de ordem, na frente, primeiro, em uma sequência de afirmações vazias de significado. Essas afirmações de LT, são ambíguas e não explicam o conceito da divisão de frações. O tom apreciativo que envolveu a fala de LT revelou que ele próprio notara o fato. O lugar social de onde LT fala, o de aprendiz, e para quem se dirige, o pesquisador, torna esse diálogo assimétrico do ponto de vista do conhecimento matemático. Essa assimetria, valorizada por Vigotski como recurso na ZDP, na interação entre os sujeitos, permite a construção do conhecimento, mesmo que, nesse caso, ainda se expresse por dúvidas e reflexões de LT, como um processo em construção.

No fragmento entre as linhas [10] e [16], foi possível acompanhar o diálogo que envolve a tentativa de justificar a «multiplicação em x». P mantém o foco, provocando uma instabilidade, uma reflexão por parte daqueles que acreditavam ser o certo, a «multiplicação em x». Os argumentos pautaram-se pela ideia de orientação espacial, como dentro e fora. O desenvolvimento da compreensão pôde ser notado pelo fato de que os participantes já não se convenciam da eficácia do método. Essa reflexão na ação, essencial no processo de aprendizagem, resultou da prática social, da reflexão mediada pela atividade (Radford, 2006).

Na sequência, [10] dirigindo-se a K, P perguntou: «É, no lugar que tá escrito... Você poderia... dois elevado e menos um sobre três a menos um. Não foi isso que você fez?». Buscando não adiantar as resoluções que o grupo estava discutindo, P motiva a resolução do impasse pelo grupo, com a justificativa do resultado correto apresentado por K. Imediatamente após, K começa a escrever a expressão correspondente, quando foi interrompida por LT [11] que aparentemente obstruiu sua reflexão, talvez querendo complementar a fala de P: «Não, K! Ele está perguntando por que você não fez ali embaixo. Você não fez um vezes três». Enquanto K escrevia $\frac{2^{-1}}{3^{-1}}$ com uma afirmação diferente da fala de P [10], referindo-se a $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, operação que não estava sendo discutida naquele momento. K apenas ouviu o comentário de LT [11].

P [12] buscou organizar as falas, sugerindo a LT que deixasse K concluir o que ela estava fazendo. Nesse ínterim, K [13] buscava uma justificativa para $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{2^{-1}}{3^{-1}}$, usando os recursos de uma estratégia cotidiana escolar: «Por que estão nos parênteses, assim».

LT [14], «K, ele tá perguntando assim ó: você fez um vezes três e deu três, e dois vezes um deu dois. Se você fizesse dois vezes um daria dois», insistindo na explicação de qual critério K teria seguido para a ordem que ela disse ter usado na «multiplicação em x», ou seja, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ para obter $\frac{3}{2}$, no lugar do resultado dessa multiplicação que seria $\frac{1}{6}$.

Nesse momento da interação verbal propiciada pelo diálogo, LT tenta compreender a fala de P, comparando-a a sua própria palavra e faz a réplica. P o interrompe afirmando [15]: «Não, não dois vezes um, dois elevado a menos um» e LT corrige P em [16]: «Não! Na conta». P considerava $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{2^{-1}}{3^{-1}}$ e LT, provavelmente, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.

Esse diálogo revela uma dificuldade no pensamento de LT que o impede de colocar uma contrapalavra, uma réplica, que desse sustentação matemática para seu processo mental de resolução.

Esse fragmento do episódio evidencia que o grupo pouco ou nada avançou na aprendizagem de divisão de frações. Apesar das dúvidas e da busca de entendimento, os participantes ficaram presos às práticas escolares desprovidas de fundamento matemático. Havia motivação na participação, mas o baixo nível de conhecimento retrospectivo mobilizável dos participantes, obstruía a eficácia da ação na ZDP. Mesmo assim, a interação verbal permitiu o desenvolvimento em tempo real, ou seja, possibilitou que um participante inferisse no pensamento do outro, no ato da resolução, por meio de réplicas e tréplicas; no entanto, o avanço se dava mais pela percepção do que não devia ser feito. As falas revelaram as dificuldades dos participantes em superar os próprios modos de entendimento do processo de resolução, provavelmente porque as práticas escolares mecanicistas e vazias de significado tenham se mostrado bastante cristalizadas nos discursos dos participantes.

No fragmento compreendido entre [17] e [25], o diálogo continuou em torno dos mesmos temas, determinados pelo contexto que envolveu a divisão de frações.

A enunciação de P caracteriza maior proximidade entre o significado contextual (tema) e a significação do conceito de divisão de frações como saber matemático a ser utilizado em qualquer contexto, ou seja, como generalização; por outro lado, para os participantes, o conceito de divisão de frações não atingiu o estágio de generalização e ficou (em graus diferentes para cada um), restrito à significação contextual marcada por modos de raciocínio não reiteráveis ao saber matemático. No entanto, esse desequilíbrio entre as falas de P e dos participantes, tornou-se um aspecto enriquecedor das interações, no sentido de que trouxe elementos desafiadores necessários à aprendizagem e que decorreram das relações entre os que aprendiam com aquele mais experiente na tarefa.

P retomou à discussão, complementando o que LT [16] dissera, evitando explicar a resolução da divisão, mas buscando criar uma barreira que impedisse os desvios de LT e K em [17]: «É, no "x". Ali... mas voltando lá, isso aí dá confusão, essa história de multiplicar em "x". Depois vamos ver porque. Ela tirando dos parênteses não dá dois elevado a menos um? Escreve lá, K, o que você estava escrevendo, sobre?». K [18] responde: «Três elevado a menos um», ambos estão falando sobre $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{2^{-1}}{3^{-1}}$. P [19] procurou motivar K a responder: «Você sabe o resultado, o que vai em cima? Isso é igual? Em cima é?». K [20] responde: «Meio». P [21] a encorajou: «Isso! sobre?» e K. [22] respondeu: «Um terço», escrevendo $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$.

A enunciação que dá sentido ao diálogo deve ser entendida nesse momento histórico que envolveu o grupo. A dúvida sobre a divisão de frações ainda persistia, embora a representação das potências $2^{-1} = \frac{1}{2}$ e $3^{-1} = \frac{1}{3}$ estivesse correta, a divisão de frações $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$ ainda não fora compreendida. O conceito de divisão de frações estava ainda em formação, no entanto os participantes pouco avançaram.

Sem dúvida, «a divisão de frações envolve relações complexas e requer saltos qualitativos, não sendo produtivas técnicas de memorização» (Silva & Almouloud, 2008: 70). Por não ser uma operação trivial, exige um salto entre a divisão de números naturais e a divisão de números racionais e, segundo Amorim (2007), sua apropriação requer o entendimento do significado da operação de divisão, por exemplo de $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$.

Considerando as dificuldades que podem surgir, tomamos o trabalho de Lopes (2008), que relata um estudo feito com alunos da 6ª série (Ensino Fundamental), na faixa etária de 12 anos. O autor descreve as discussões e os argumentos apresentados pelos alunos que resolviam a divisão $\frac{14}{15} \div \frac{2}{5}$ e, tão logo o professor a escrevera, os alunos resolveram da forma $\frac{14}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{7}{3}$. A argumentação dos alunos em favor da operação que fizeram surpreendeu o pesquisador, ao mostrarem que $\frac{7}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$, com a explicação do aluno 1: «Ué! A divisão não é a operação inversa da multiplicação?». Para Lopes (2008: 19), o aluno parece não ter dúvida quanto a essa forma de resolução. O autor aponta outro aluno ao qual foi perguntado «e se fosse uma divisão bem encrencada, como por exemplo $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$?». E o aluno respondeu: «Nesse caso acho que é melhor uma fração equivalente que dê para aplicar a minha regra, uma fração que tanto o numerador quanto o denominador devem ter os fatores 5 e 7». Assim, $\frac{2}{3}$ é equivalente $\frac{2x5x7}{3x5x7}$, a divisão resulta $\frac{2x5x7}{3x5x7} \div \frac{5}{7} = \frac{2x7}{3x5} = \frac{14}{15}$. A seguir, Lopes (2008) retoma com os alunos a generalização: se *a, b, c* e *d* são números inteiros, com *a, b, c* e $d \neq 0$, dada a divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ e sabendo que $\frac{a}{b}$ é equivalente a $\frac{acd}{bcd}$, a operação pode ser feita do seguinte modo: $\frac{acd}{bcd} \div \frac{c}{d} = \frac{acd \div c}{acd \div d} = \frac{ad}{bc}$.

O grupo estava parado nessa situação, LT e K buscavam encontrar uma aplicação de conhecimento que ecoasse em suas mentes, como se pode observar no fragmento entre [23] e [28]. P [23] dirigiu-se ao grupo: «Então, como é que divide essa fração aí?». K [24] gesticulou com os ombros, sinalizando que não sabia e sorriu. P [25] insistiu, dirigindo-se ao grupo: «Alguém explica? Como é que se divide um meio dividido por um terço?» LT [26] arriscou : «Você cancela o de cima... o um com... o um do meio com um terço e joga dois sobre três». P [27] interveio, novamente com a intenção de interrogar LT para que ele pensasse em sua sugestão de «cancelar», «jogar»: «Será que cancelar é uma boa». K [28] opinou: «Tira um do meio vezes um terço?».

As tentativas dos participantes mostram que ainda não haviam avançado na formação do conceito científico da divisão de frações. Não se estabelecera a compreensão do enunciado da operação por LT, K e, provavelmente pelos demais participantes. O diálogo permitiu a alimentação da discussão em torno das regras dessa divisão baseadas em estratégias de orientação espacial, por repetição de algum modelo estruturado em função de práticas escolares baseadas em estratégias vazias de significado matemático.

Os diálogos revelam as dificuldades na construção do conceito científico, tal qual define Vygotsky (1993), pois a mediação entre os sujeitos participantes, no âmbito interpessoal, e com conceitos retrospectivos (no âmbito intrapessoal) é precária, do ponto de vista do conhecimento matemático e reflete-se na baixa capacidade de atingir o nível de generalização que reestruturaria os conceitos anteriores e daria condições para novas aprendizagens.

O fragmento compreendido entre [29] e [38] finalizou a discussão sobre a divisão de frações. MM, que se mantivera calada, dirigiu-se a K e explicou, em [29]: «Um meio vezes três sobre um». O sentido dessa frase está relacionado ao contexto social da resolução, ou seja, ao desenrolar dos acontecimentos até aquele momento. A fala de MM não foi uma simples tentativa de explicação. De fato, foi uma fala embasada nas resoluções que estava fazendo por meio de anotações em seu caderno como $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{2^{-1}}{3^{-1}}$; $2^{-1} = \frac{1}{2}$ e $3^{-1} = \frac{1}{3}$; $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1}$ que se baseavam nas discussões que ouvira e revelavam familiaridade com o entendimento matemático do processo.

A fala de MM [29] provocou uma reação imediata em K, como se ela tivesse se lembrado da operação. Possivelmente, K havia estudado essa operação em anos anteriores. K escreveu, ato contínuo à sugestão de MM, sem hesitar, sem discutir [30], a expressão $\frac{1}{2} \times \frac{3}{1}$, perguntando a MM: «Assim?».

A capacidade súbita de K expressar a operação surgiu diretamente da interação. A fala de MM provocou a atribuição de significado para K. A internalização do conceito científico evidenciou-se como mediado e consciente, isto é, mediado pela fala de MM e por conhecimentos retrospectivos que surgiram como resultado do diálogo e que permitiram que K atingisse o nível de generalização que impulsionou sua resposta.

No entanto, a compreensão não foi geral, LT ainda sustentava um olhar de dúvida em relação à resolução feita por K, por sugestão de MM. Quanto aos demais participantes que assistiam, mantiveram-se calados a maior parte do tempo do desenvolvimento do diálogo.

P acompanhou a resolução de K, [30] dizendo: «Igual». K [32] escreve, completando: $\frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$. P [32] «Resposta. E aí você não tem como». P concordou com a resposta, observando que K não mais multiplicou em «x» e não tentou outra estratégia mecanicista para a solução. Ela agiu conscientemente, escrevendo a multiplicação sugerida por MM. K agradeceu a MM [34]: «Obrigada!» e P comenta [35]: «Bom, a K fez e eu imagino que ela tenha entendido». K confirma [36]: «Agora sim». LT sorri e provoca K, reconhecendo- a como mais capaz [37] «Tá. Agora me explica».

5. Algumas considerações

Este estudo, em uma perspectiva histórico-cultural, considera a mediação pela linguagem na interação verbal e a mediação pela interação social concretizadas nos diálogos ocorridos na resolução da atividade de aprendizagem de divisão de frações como constitutivos do próprio pensamento matemático.

É possível constatar que as dificuldades na construção do conceito científico de divisão de frações foram decorrentes do baixo nível dos conhecimentos retrospectivos matemáticos dos estudantes. Esse baixo nível limitou as possibilidades, no âmbito interpessoal, da mediação entre os sujeitos participantes e pouco contribuiu com a formação de novos conceitos ou com a modificação de conceitos retrospectivos (no âmbito intrapessoal). O precário domínio de conhecimentos matemáticos retrospectivos restringiu as mudanças que poderiam ser criadas na ZDP e culminou na baixa capacidade de atingir o nível de generalização, necessária à reestruturação de conceitos anteriores e a novas aprendizagens.

Os processos de linguagem expressos nos diálogos entre os participantes evidenciaram dificuldades marcadas por explicações repetitivas e mecanicistas e baixo nível de conhecimento matemático retrospectivo; no entanto, mesmo assim, permitiram a exposição do pensamento matemático como conhecimento retrospectivo e provocaram apreciações e réplicas dos estudantes como elementos esclarecedores (ou não) da resolução. Nesse sentido, a linguagem e a interação tornaram-se indissociáveis e retrataram e explicitaram a aprendizagem em processo. A interação verbal, que incluiu expressões faciais, gestos, movimentos corporais e silêncios, concretizou a enunciação, criando possibilidade de movimento e mudança em tempo real, ou seja, em concomitância ao entendimento matemático da divisão de frações. Sem dúvida, movimento e mudança estiveram marcados pelas possibilidades dadas pelos conteúdos mobilizáveis e retrospectivos e pelas potencialidades que os processos de linguagem e interação criaram.

Referências

AMORIM, M. P. (2007) *Apropriação de significados do conceito de números racionais: uma abordagem histórico-cultural*. Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade do Extremo Sul Catarinense. CRISCIUMA, SC.

BAKHTIN, M. (Volochinov, VN) (2006) *Marxismo e filosofia da linguagem*. Trad. Michel Lahud e Yara Frateschi Vieira. 12 ed. São Paulo: Hucitec.

BARDIN, L. (1995) *Análise de conteúdo*. Trad. Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70.

FIORENTINI, D. (1995) Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. *Zetetike*, 3, 1-38.

GASCÓN. J. (2001) Incidencia del Modelo Epistemológico de las Matemáticas sobre las práticas docentes. *Relime*, 4, 129-160.

RADFORD, L. (2006) Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime, Número Especial*, 103-129.

RADFORD, L. (2011) *Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

LOPES, A. J. (2008) O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. Rio Claro: *Bolema*, 21, 1-22.

MORETTI, V. D.; PANOSSIAN, M. L. & MOURA, M. O. (2015) Educação, educação matemática e teoria cultural da objetivação: uma conversa com Luis Radford. *Educação Pesquisa*, 1, jan./mar. 243-260.

OLIVEIRA, M. H. P. & BORGES, W. A. (2013) Contribuições de Vigotski, Bakhtin e Wittgenstein para o entendimento dos processos de linguagem na aprendizagem de potências com expoente negativo. *Perspectivas da Educação Matemática*, 119-134.

SANNINO, A. (2011) Ricerca-intervento in teoria dell'attività attualità della tradizione vygotskijana. *European Journal of Research on Education and Teaching*, 3, 103-114. Recuperado em 10 de março de 2015, de http://www.formazione-insegnamento.net/files/FORMAZIONE&INSEGNAMENTO_3-2011/103-114%20%20%20Sannino.pdf.

SAVIANI, D. (2008) *História das idéias pedagógicas no Brasil*. 2ª ed. Campinas, SP: Autores Associados.

SILVA, M. J. F. & ALMOULOUD, S. A. (2008) As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. *Bolema*, 21, 55-78.

VYGOTSKY, L. S. (1993) Pensamiento y lenguaje: conferencias sobre psicología. *Obras escogidas II*. Madrid: Visor.

VIGOTSKI, L. S. (2000) *A construção do pensamento e da linguagem*. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes.

VYGOTSKY, L. S. (2000) *Pensamento e linguagem.* Trad. Jefferson Luiz de Camargo. São Paulo: São Paulo: Martins Fontes.

VIGOTSKI, L. S. (2010) *Psicología pedagógica.* Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes.

WERTSCH, J. (1988) *Vygotsky y la formación social de la mente*. Trad. J. Zanón; M. Cortés. Barcelona: Paidós.