

LA INVESTIGACIÓN «SOBRE» EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: APRENDIZAJE DEL PROFESOR Y PRÁCTICA PROFESIONAL

The research «about» the mathematics teacher: teacher learning and professional practice

Salvador LLINARES

Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla

RESUMEN: Una revisión de las investigaciones centradas en el profesor de matemáticas realizada en España en los últimos años ha permitido identificar dos agendas de investigación: aprendizaje del profesor y práctica profesional del profesor de matemáticas. La caracterización de cada una de estas agendas se hace identificando tres aspectos en las investigaciones: (i) la problemática general en la que está inserta, (ii) los focos específicos de atención que definen las preguntas y problemas de investigación específicos, y (iii) los marcos teóricos/conceptuales sobre los que se apoyan las investigaciones. El meta-análisis realizado ha producido una topología de este ámbito de investigación en Didáctica de la Matemática en nuestro país desde la cual se desarrolla una prospectiva.

Palabras clave: didáctica de las Matemáticas, agenda de investigación, aprendizaje del profesor, práctica del profesor.

ABSTRACT: A review of research focused on mathematics teacher undertaken in Spain during the last years has allowed to identify two research agendas: teacher learning professional practice. The characterization of each these agendas is made with the identification of three aspects in the researches: (i) the general problematic, (ii) the specific focuses that defines research issues and problem, and (iii) the theoretical constructs and theoretical/conceptual frameworks used. The meta-analysis has afforded a topology of this scope of research of Didactics of Mathematics at Spain and has allowed to develop a prospective.

Key words: didactic of Mathematics, research agenda, teacher learning, teacher practice.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la investigación científica en el área de Didáctica de la Matemática es un fenómeno relativamente reciente en nuestro país y está vinculado al reconocimiento por la Ley de Reforma Universitaria de la Didáctica de la Matemática como área de conocimiento y con la creación de los departamentos universitarios. Este contexto institucional ha favorecido el desarrollo de una investigación específica en Didáctica de las Matemáticas a través de programas de doctorado, realización de proyectos y constitución de grupos de investigación. Esta situación ha permitido potenciar la vinculación de la investigación en Didáctica de la Matemática realizada en nuestro país con la realizada a nivel internacional aportando referencias en la constitución de la Didáctica de la Matemática como un dominio científico (Sierpiska y Kilpatrick, 1998).

En este contexto y desde hace algunos años se han empezado a realizar en nuestro país investigaciones centradas en diferentes aspectos relacionados con el profesor de matemáticas. El objetivo de este artículo es presentar una organización de estas investigaciones realizadas en los últimos años y caracterizar diferentes agendas de investigación. La caracterización de estas agendas se realiza identificando los problemas que se abordan y considerando los diferentes marcos teóricos y conceptuales explicitados en las investigaciones y la identificación de los diferentes constructos teóricos utilizados. Colocar el objeto de atención en los marcos de referencia es debido a que éstos permiten generar una serie de preguntas de investigación cuyas respuestas permiten construir nuevo conocimiento. Además, la posibilidad de caracterizar las agendas de investigación a través de los elementos teóricos utilizados y de las preguntas formuladas permite describir una determinada topología de la investigación sobre el profesor de matemáticas desde los supuestos y conjeturas previas derivadas del marco teórico asumido. El contenido de esta topología determina un estado de la cuestión, que inevitablemente va a estar vinculado a los «modos de ver» el mundo definidos por las referencias teóricas utilizadas. Finalmente, se explicita una prospección de futuro considerando tanto los nuevos desarrollos de los marcos teóricos actuales como por la posibilidad de superarlos al realizar nuevas aproximaciones teóricas.

La importancia de los marcos teóricos adoptados en las investigaciones es debida a que estas referencias determinan en primer lugar lo que tiene que ser explicado, es decir, lo que permite establecer el problema de investigación. La elección de las referencias teóricas no determina unívocamente el problema de investigación pero sí ayuda a definirlo. Así, los constructos teóricos usados y sus relaciones determinan las características relevantes de un fenómeno derivándose la definición del problema. Por otra parte, los constructos teóricos asumidos en la investigación también sirven como guía para el análisis y la explicación. Es en este contexto donde a veces un uso implícito de un marco teórico de referencia se hace explícito en la definición de las categorías de análisis o de las unidades de análisis que ayudan al investigador a «ver» de una determinada manera. De esta manera, la construcción de nuevo conocimiento derivada de la investigación viene determinada por los elementos teóricos asumidos por el investigador.

Una alternativa a esta aproximación a la investigación es la que intenta generar teoría desde los datos por lo que la investigación produce los elementos teóricos para explicar una parte de la realidad. Sea cual sea el posicionamiento epistemológico de la investigación, su identificación y caracterización permitirá generar una topología del ámbito de investigación sobre el profesor de matemáticas.

El objetivo que nos hemos propuesto determina el aspecto de las investigaciones que va a constituir el contenido de la revisión realizada. Este condicionante determina que esta revisión no sea cuantitativa en relación a las investigaciones sino cualitativa en relación a los constructos teóricos usados. Planteando la revisión de esta manera será posible aproximarnos a las características de los marcos teóricos utilizados y la forma en la que han sido relacionados en la realización de la investigación y en la generación de nuevo conocimiento en cada una de las problemáticas identificadas en cada una de las agendas de investigación.

1.- AGENDAS DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DESARROLLADAS EN ESPAÑA EN LOS ÚLTIMOS AÑOS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS.

Considerar «lo relativo» al profesor como objeto de investigación implica tener en cuenta que lo que va a ser objeto de investigación se refiere al profesor, su acción y su contexto, por eso en este trabajo hablamos de «la investigación sobre el profesor de matemáticas». Las investigaciones revisadas han abordado aspectos particulares definiendo diferentes problemáticas y utilizando supuestos teóricos distintos, definiendo unas características y propósitos específicos. En este trabajo vamos a considerar una *agenda de investigación* al conjunto formado por una problemática determinada, los objetos foco de atención que especifican un nivel más concreto en cada problemática definiendo subproblemáticas y el conjunto de marcos teóricos utilizados. A través de un proceso inductivo, hemos organizado las diferentes investigaciones revisadas considerando las «maneras de mirar del investigador» (qué ha mirado y con qué supuestos teóricos de referencia) lo que ha producido la caracterización de agendas de investigación.

La revisión de las investigaciones realizadas ha permitido detectar diferentes aspectos que han sido el foco de atención de los investigadores generándose dos agendas. Una de ellas recoge todos los aspectos investigados relativos a cuestiones de aprendizaje y generación de nuevo conocimiento necesario para enseñar. La segunda agenda recoge todos los aspectos investigados vinculados a la práctica profesional del profesor.

Las investigaciones revisadas se aproximan a las cuestiones identificadas desde esquemas teóricos específicos en cada problemática. En algunos casos las reflexiones realizadas en la investigación parecen estar más vinculadas al marco teórico utilizado que a la propia problemática vinculada al profesor. Es la diferencia entre una investigación sobre/con el profesor y una investigación en la que los participantes son los profesores pero el objeto de estudio no es específico del profesor ni de su tarea. Sin embargo la inclusión de algunas de estas investigaciones en esta revisión permite obtener una topología del campo que recoge otras maneras de mirar (bajo el supuesto de que es el

marco teórico el que puede enriquecer la caracterización de la agenda de investigación referida al profesor de matemáticas).

AGENDA 1. APRENDIZAJE DEL PROFESOR: VARIABLES, CONTENIDO Y PROCESOS

La problemática. El aprendizaje por parte del profesor del conocimiento necesario para enseñar, la forma en que se conceptualiza tanto el conocimiento, el proceso de generación, los mecanismos que se conjeturan y organizan dicho proceso y las variables que influyen constituyen una problemática de investigación que ha recibido considerable atención. El contexto que define esta problemática se inserta dentro de cuestiones más generales sobre el aprendizaje explicitándose la relevancia de los referentes previos con los que el individuo acude a la situación de aprendizaje, los mecanismos que intervienen en la generación de nuevo conocimiento y el diseño de entornos de aprendizaje específicos para facilitar un determinado aprendizaje. En este contexto general, aprender a enseñar suele ser concebido como un proceso activo en el que el individuo construye su conocimiento tomando como referencia su conocimiento previo y el contexto en el que está, siendo este supuesto el que ayuda a definir algunas de las cuestiones de investigación específicas planteadas. Los mecanismos de cambio, fases en el desarrollo, procesos característicos del aprendizaje, son elementos dentro de la problemática del aprendizaje del profesor.

Los “objetos” de investigación

Esta problemática así caracterizada es aplicable tanto a estudiantes para profesores en su formación inicial como a profesores en ejercicio durante cursos de desarrollo profesional definiendo como objeto de interés la caracterización de lo que se conoce —como referencias del proceso de aprendizaje—, las variables que influyen, y el contenido propio del aprendizaje, de ahí aparecen dos denominaciones de las suproblemáticas: aprender a enseñar y desarrollo profesional. Sin embargo en nuestro país las investigaciones realizadas en esta problemática general del aprendizaje del profesor se han centrado en la subproblemática de aprender a enseñar centrada en los estudiantes para profesor.

Desde las investigaciones revisadas se han identificado tres objetos de atención que definen un segundo nivel de concreción de esta problemática más general.

- Conocimiento: de matemáticas y de contenido pedagógico específico de las matemáticas.
- Proceso de socialización: relación entre creencias, conocimiento y acción durante las prácticas de enseñanza.
- Evolución y cambio de creencias y conocimiento (manera de comprender y usar los contenidos matemáticos-conceptos y procedimientos) como efecto de una intervención diseñada específicamente.

El cuadro 1 recoge las investigaciones revisadas para realizar la caracterización de esta agenda de investigación.

Agenda 1. Aprendizaje del profesor: variables, contenido y procesos.						
Objeto	Foco	Problema de investigación: Características y propósitos: cuestiones de investigación	Marco conceptual/teórico	Dominios	Nivel	Autores
Conocimiento de matemáticas y de contenido pedagógico	Conocimiento de matemáticas	- Caracterizar concepciones de Eps sobre la aleatoriedad y los criterios por los que justifican sus decisiones en situaciones aleatorias. Identificar diferentes tipologías de sujetos en relación a las justificaciones explicativas antediferentes situaciones aleatorias	Se toma como referencia la manera como se caracteriza el contenido matemático o los procesos de resolución de problemas matemáticos	Aleatoriedad y probabilidad	Eps de Ed. Primaria	Azcárate, P. (1996) Azcárate, P.; Cardeñoso, J. M. y Porland, R. (1998)
		- Análisis de la comprensión del concepto «altura de un triángulo» identificando procesos de aprendizaje y razonamientos seguidos a través del uso de las imágenes conceptuales y de la definición del concepto puestas en juego	Niveles de razonamiento de Van Hiele	Altura de un triángulo	Eps de Ed. Primaria	Gutiérrez y Jaime (1996/1998)
		- Determinar el grado de adquisición del nivel de razonamiento de Van Hiele en razonamiento geométrico.	Niveles de razonamiento de Van Hiele	Conceptos geométricos. Nivel de adquisición de niveles de razonamiento	Eps de Ed. Primaria	Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991)
		- Analizar los teoremas en acción y esquemas puestas en juego en la resolución y formulación de problemas de porcentaje	Campo conceptual de las estructuras multiplicativas y teoremas en acción (Vergnaud)	Porcentaje	Eps de Ed. Primaria	Maza (2000)
		- Análisis de las representaciones usadas por estudiantes para profesores de Enseñanza Secundaria en la resolución de un problema geométrico	Se toma como referencia el contenido matemático o los procesos de resolución de problemas matemáticos	Representación y resolución de problemas	Eps de Enseñanza Secundaria	Rico, Segovia y González-López (2000)
	Conocimiento de contenido pedagógico	- Análisis del conocimiento pedagógico sobre la estructura multiplicativa puesto de manifiesto en la formulación de problemas	Se toma como referencia el contenido del análisis didáctico del contenido matemático	Estructuras multi-plicativas	Eps de Ed. Primaria	Castro y Castro (1996)

Agenda 1. Aprendizaje del profesor: variables, contenido y procesos.

			- Analizar las características de la comprensión de las fracciones y de los números racionales como objetos de representación en dotar de significado a los conceptos y procesos como aspecto del conocimiento de contenido pedagógico específico de las matemáticas	Teoría dinámica del desarrollo de la comprensión (Pirie y Kieren)	Fracciones y números racionales	Eps de Ed. Primaria	Llinares (1991) Llinares y Sánchez (1996/1998) Llinares, Sánchez y García (1994)
Proceso de socialización	Creencias, conocimiento y prácticas de enseñanza	- Análisis de la enseñanza práctica de estudiantes para profesor tomando como referencia el conocimiento práctico del profesor con experiencia	- Análisis de la enseñanza práctica de estudiantes para profesor tomando como referencia el conocimiento práctico del profesor con experiencia	Procesamiento de la información. Experto-novel	Resolución de problemas	Eps de EGB	Blanco (1991)
		- Estudiar el papel desempeñado por las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza mantenidas por estudiantes para profesor de Primaria en su proceso de socialización desarrollado durante el periodo de prácticas de enseñanza	- Estudiar el papel desempeñado por las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza mantenidas por estudiantes para profesor de Primaria en su proceso de socialización desarrollado durante el periodo de prácticas de enseñanza	Interaccionismo simbólico (Blunner)	Creencias sobre las matemáticas y su enseñanza	Eps de Ed. Primaria	Llinares y Sánchez (1989)
		- Estudiar el impacto del periodo de prácticas sobre las concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza. Caracterización de las estrategias generadas para dar coherencia a las relaciones entre las concepciones y la práctica, así como los cambios generados	- Estudiar el impacto del periodo de prácticas sobre las concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza. Caracterización de las estrategias generadas para dar coherencia a las relaciones entre las concepciones y la práctica, así como los cambios generados	Teoría de los constructos personales de Kelly	Creencias sobre las matemáticas y su enseñanza	Eps de Ed. Primaria	Sánchez (1991) Sánchez y Llinares (1990)
		- Analizar los significados compartidos entre estudiantes para profesores en práctica y sus alumnos en relación a lo que es un problema escolar, la naturaleza de las matemáticas escolares, y las creencias sobre la enseñanza-aprendizaje	- Analizar los significados compartidos entre estudiantes para profesores en práctica y sus alumnos en relación a lo que es un problema escolar, la naturaleza de las matemáticas escolares, y las creencias sobre la enseñanza-aprendizaje	Enfoque antropológico con énfasis en la influencia de la cultura imperante en las aulas sobre el proceso de aprender a enseñar	Enseñanza resolución de problemas	Eps de Ed. Primaria	Sánchez y Llinares (1996)

Agenda 1. Aprendizaje del profesor: variables, contenido y procesos.

* Efecto de una intervención. Evolución y cambio de creencias y maneras de comprender	Creencias y concepciones	<ul style="list-style-type: none"> - Caracterizar y estudiar el cambio en las concepciones y creencias debidas tanto a la maduración como a las intervenciones específicas de formación - Explicitar creencias y concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de matemática desde el análisis de dilemas epistemológicos y didácticos - Caracterizar la evolución durante una intervención didáctica 	Aprendizaje como un proceso activo en el que las creencias se consideran referente	Creencias concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje	Eps de Ed. Secundaria	Flores (1998)
Conocimiento y procedimientos referidos al contenido matemático	<ul style="list-style-type: none"> - Conocer el desempeño en el cálculo mental y estudiar el efecto de una propuesta didáctica en relación con el cálculo mental que favorezca una mayor comprensión de la aritmética elemental - Caracterizar una tipología de los errores en el cálculo mental chequeados desde la identificación de los diversos métodos usados a lo largo de la historia 	<ul style="list-style-type: none"> - Implementación de una propuesta didáctica con el objeto de caracterizar los procesos de aprendizaje de conceptos de la geometría de los sólidos desde el modelo de Van Hiele 	Aprendizaje de y en relación a una tipología de métodos variados de cálculo	Cálculo mental: operaciones y tránsito entre naturales y decimales	Eps de Ed. Primaria	Gómez (1995 a, b)
Integrar el campo formativo e investigativo	<ul style="list-style-type: none"> - Explicitar, poner a punto y experimentar un modelo didáctico en la formación inicial de profesores derivado del análisis etnomatemático de contextos artesanales 	<ul style="list-style-type: none"> - Explorar la actuación al resolver problemas de Eps instruidos en un curso organizado en función de un modelo de competencia, describiendo su actuación respecto a los elementos del modelo 	Modelo de razonamiento de Van Hiele	Geometría de los sólidos	Eps de Ed. Primaria	Guillén (1997)
Componentes modelo de actuación en resolución de problemas. Juicios			Etnomatemática (MEDIPSA)	Práctica matemática contextualizada en ambientes artesanos	Eps de Ed. Primaria	Oliveras (1996)
			Semiótica de las matemáticas	Semiótica de las matemáticas	Eps de Ed. Primaria	Puig (1996)

La caracterización de cada uno de estos focos considerados como objetos de atención en las investigaciones lo vamos a realizar en la siguiente sección identificando la relación entre las cuestiones de investigación planteadas y el marco teórico o conceptual adoptado.

Características y propósitos: relación entre las cuestiones de investigación y el marco teórico

A) Conocimiento de matemáticas y conocimiento de contenido pedagógico

La descripción de lo que se conoce en el contexto de aprender a enseñar se ha apoyado en el uso de la distinción y relación entre el «conocimiento del contenido matemático» y el «conocimiento de contenido pedagógico» introducidos por Shulman (1986) como aspectos relevantes del conocimiento necesario para enseñar^{1,2}. Para describir estos diferentes aspectos del conocimiento las investigaciones realizadas ha hecho uso de una manera más o menos explícita de diferentes constructos teóricos.

* *Conocimiento de matemáticas.* — La manera en la que los estudiantes para profesor comprenden el contenido matemático ha sido analizada usando diferentes marcos teóricos o conceptuales que son las referencias para describir y explicar el término «formas de conocer». El foco en este tipo de investigación es describir la forma en la que los estudiantes para profesor comprenden un determinado contenido matemático. Este tipo de investigación responde a la idea de llegar a comprender las características de la forma en que los estudiantes para profesor comprenden las nociones matemáticas. Qué conocen y cómo lo conocen en relación al contenido matemático son pues las preguntas alrededor de las que se estructura la investigación. Con este tipo de preguntas de investigación el marco teórico utilizado determina las categorías de análisis del conocimiento de matemáticas de los estudiantes para profesor. Así por ejemplo, en la investigación de P. Azcárate (1996) Azcárate et al. (1998) se explora cómo los estudiantes para profesor interpretan la información disponible sobre situaciones de incertidumbre, qué conocen y cuáles pueden ser los obstáculos que reflejen sus formas de concebir la aleatoriedad como paso previo a cualquier formación específica. La «forma de conocer» el contenido matemático de los estudiantes para profesor se caracteriza desde las referencias teóricas del continuo entre el conocimiento cotidiano y formal tomando como referencia al contenido matemático intentando caracterizar los tipos de argumentos que utilizan los estudiantes para profesor para explicar las situaciones aleatorias. De la misma manera la categorización de las estrategias de resolución de un problema realizada por Rico et al. (2000) emplea como referente las diferentes aproximaciones matemáticas que subyacen a las técnicas de resolución de problemas de matemáticas empleadas por los estudiantes para profesor. Por otra parte en la investigación de Gutiérrez et al. (1991) y Gutiérrez y Jaime (1998) hacen un uso explícito de la teoría de Van Hiele³ para describir los niveles de razonamiento geométrico y el modelo de adquisición de conceptos geométricos de Vinner⁴, respectivamente. De la misma manera Maza (2000) hace uso de los constructos teóricos «teorema en acción» y

«esquema» procedentes de la noción de campo conceptual de Vergnaud⁵ para caracterizar la comprensión de una parte del campo de las estructuras multiplicativas de estudiantes para profesor inferidas desde la resolución y formulación de problemas con porcentajes.

El uso explícito de un marco de referencia teórico permite a los autores proporcionar la información obtenida vinculándola a los constructos teóricos que articulan el marco de referencia (niveles de desarrollo, grado de adquisición, imagen del concepto y definición del concepto, teoremas-en-acto y categorías específicas para describir la forma de comprender). En estas investigaciones, las referencias usadas para realizar el análisis proceden de las maneras en las que se caracteriza la forma de conocer el contenido matemático.

* *Conocimiento de contenido pedagógico.* — El término conocimiento de contenido pedagógico hace referencia al conocimiento del profesor del contenido que tiene que enseñar considerándolo desde la perspectiva de la enseñanza-aprendizaje. Se centra en el conocimiento del profesor de las potencialidades y limitaciones de los diferentes modos de representación del contenido matemático como medios para hacer comprensible a los estudiantes el contenido matemático y el conocimiento de las dificultades y errores más comunes de los alumnos en relación a un contenido específico, etc. En particular podemos considerar parte del conocimiento de contenido pedagógico los resultados de las investigaciones didácticas sobre el aprendizaje de los alumnos que aportan información al profesor permitiéndole transformar el contenido matemático en materia a enseñar.

Las investigaciones que han hecho un uso más o menos explícito de esta noción se preguntan por la forma de comprender de los estudiantes para profesor en relación al vínculo entre la comprensión matemática, el uso de los modos de representación o las características del aprendizaje de estas nociones procedentes de las investigaciones sobre el aprendizaje de los alumnos. Esto viene justificado por el reconocimiento de un aspecto de la actividad profesional del profesor que consiste en «usar los modos de representación y las diferentes estructuras de los problemas aritméticos para hacer comprensible el contenido matemático» que está en la base de la tarea de diseñar y elegir actividades, en la planificación y evaluación de la enseñanza y en la propia interacción que se genera en el aula. Así, por ejemplo, para dar cuenta de las características de la comprensión de las nociones matemáticas vinculada a los modos de representación Llinares et al. (1994, 1998) usan el modelo de comprensión matemática caracterizado por un proceso recursivo entre diferentes niveles propuesto por Pirie y Kieren⁶ para la descripción de las características del conocimiento de contenido pedagógico sobre las fracciones y los números racionales en estudiantes para profesor. Por otra parte, en la investigación de Castro y Castro (1996) se analiza el conocimiento de las estructuras multiplicativas de los estudiantes para profesor utilizando como referente los resultados de las investigaciones sobre los problemas aritméticos de estructura multiplicativa.

Las investigaciones centradas en la caracterización del conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes para profesor se construyen sobre la relación que debe existir entre la comprensión de las nociones matemáticas y la articulación de dicha comprensión cuando se piensa en las nociones matemáticas como objetos de enseñanza-aprendizaje.

B) Los procesos de socialización

El aprendizaje de los estudiantes para profesor en la escuela dentro de un contexto institucionalizado como es un programa de formación inicial es un componente estándar en los programas de formación. El proceso de socialización en la escuela, y en lo que significa ser un profesor, desarrollado durante las prácticas de enseñanza ha sido otro de los objetos de estudio. Las investigaciones centradas en los procesos de socialización pretenden comprender los procesos a través de los cuales un individuo llega a ser miembro de una comunidad de profesores⁷. Esta investigación ve al profesor como un miembro de una cultura profesional; así, el proceso de llegar a ser un profesor se ve como llegar a ser miembro de esta cultura. Las cuestiones que articulan este aspecto del proceso de llegar a ser un profesor intentan dar cuenta del papel que desempeñan las creencias y el conocimiento de los estudiantes para profesor en definir y dar sentido a su papel como profesores desde el punto de vista de llegar a ser miembros de una determinada cultura y por tanto desarrollar una determinada práctica.

Las investigaciones revisadas están centradas en el estudio del impacto sobre la práctica desarrollada por los estudiantes para profesor de las creencias mantenidas en relación a las matemáticas y la enseñanza-aprendizaje. Por otra parte, el estudio de la relación entre las creencias, lo que se aprende y la práctica desarrollada durante las prácticas de enseñanza se estudia en algunas investigaciones concibiéndose la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva de la resolución de problemas. El análisis se centra en las características de la gestión de la enseñanza por parte del estudiante para profesor y los mecanismos que genera para definir su práctica.

* *Creencias, conocimiento y prácticas de enseñanza.* — El problema de la relación entre las creencias, el conocimiento y las prácticas de enseñanza y la descripción de los factores que intervienen en el proceso de llegar a ser un profesor durante las prácticas de enseñanza ha sido abordado desde diferentes marcos teóricos. La caracterización de los significados que el estudiante para profesor atribuye a los objetos del mundo del profesor de Enseñanza Primaria se particularizó al caso de las creencias sobre las matemáticas en el estudio de Llinares (Llinares y Sánchez, 1989). La perspectiva proporcionada por el interaccionismo simbólico de Blumer⁸ permitió definir la relación entre los significados atribuidos a las matemáticas escolares y su enseñanza-aprendizaje como objetos del mundo experiencial del estudiante para profesor y el modo en que los estudiantes para profesor se disponían a actuar para conseguir sus objetivos durante las prácticas de enseñanza. Desde la perspectiva del estudio realizado y teniendo en cuenta las premisas del interaccionismo simbólico, el estudiante para profesor dota de significado

a las matemáticas y su enseñanza, y ante el proceso de enseñanza (prácticas de enseñanza) este significado es interpretado a la luz de la nueva situación (su rol como profesor) y utilizado (proceso interpretativo) para orientar sus acciones.

Por otra parte el estudio de Sánchez (Sánchez y Llinares, 1990) se situó en la intersección del conocimiento y socialización estudiando las concepciones acerca de las matemáticas y su enseñanza que tienen los maestros en formación, así como la influencia que sobre los mismos ejercen los periodos de prácticas docentes. El marco teórico adoptado fue la teoría de los constructos personales de Kelly⁹ considerando que las interpretaciones personales de los estudiantes para profesor estaban estructuradas por un conjunto de posicionamientos dicotómicos que constituían su modelo de la realidad.

La enseñanza vista desde la perspectiva de la resolución de problemas (Polya) permite tener un esquema inicial para el análisis de diferentes momentos de la instrucción en las prácticas de enseñanza. Las investigaciones de Blanco (1991) y Sánchez y Llinares (1996), adoptando inicialmente este posicionamiento, desarrollan aproximaciones centradas en aspectos complementarios del proceso de aprender a enseñar y sus mecanismos. Por una parte, y dentro del paradigma de investigación cognitiva del procesamiento de la información denominado experto-novel, Blanco intenta dar cuenta de las diferencias entre profesores expertos y estudiantes para profesor usando la enseñanza basada en la resolución de problemas como un referente desde el que chequear la enseñanza desarrollada por los estudiantes para profesor. Por otra parte, desde una perspectiva antropológica la investigación de Sánchez y Llinares (1996) reconoce a la cultura escolar imperante en las aulas escolares como un factor determinante en el proceso de aprendizaje del estudiante para profesor, al mismo tiempo que se admite que los estudiantes para profesores poseen unas concepciones fruto de sus experiencias personales relativas al aprendizaje-enseñanza de las matemáticas contextualizadas en la cultura escolar. El foco del estudio fue los significados implícitos aparentemente compartidos sobre la «clase de matemáticas» entre los estudiantes para profesores y los alumnos con los que toman contacto durante las prácticas de enseñanza y su impacto en lo que se aprende y cómo se aprende durante las prácticas de enseñanza.

El planteamiento de las investigaciones que han tenido como foco el proceso de socialización de los estudiantes para profesor durante el periodo de prácticas de enseñanza ha subrayado la relación dialéctica entre las creencias y concepciones mantenidas por los estudiantes para profesor y el propio contexto del aula donde éstos empiezan a enseñar, constituyéndose dicha relación en el foco específico de análisis de las investigaciones. Los diferentes referentes teóricos adoptados —interaccionismo simbólico, teoría de los constructos personales, experto-novel-enfoque socio-cultural— muestran la complejidad del estudio de los procesos de socialización y la necesidad de desarrollar diferentes «maneras de ver» el fenómeno educativo. La reflexión sobre qué aspectos de los supuestos teóricos puedan llegar a ser compatibles y cuáles irreconciliables a nivel epistemológico emerge como una problemática de la investigación.

C) *Efecto de una innovación. Evolución y cambio en las «formas de conocer»*

Existen un grupo de estudios que implementan una propuesta experimental de enseñanza en algún punto del programa de formación centrada en aspectos considerados relevantes por los autores y con el objetivo de mejorar la comprensión de los estudiantes para profesor o introducir planteamientos críticos sobre sus creencias. Globalmente consideradas las investigaciones revisadas y que han sido incluidas en este apartado adoptan un posicionamiento cognitivo en el que conocimiento/comprensión, juicios y creencias/concepciones son constructos referidos a aspectos de la cognición de los individuos. Por otra parte, algunas veces no existe explícitamente una descripción de las características del aprendizaje o de los mecanismos que subyacen al desarrollo propuesto en la innovación pero se proporcionan tipologías y referentes del tipo de comprensión conseguido o describen cambios en los juicios sobre resolución de problemas o en las creencias mantenidas.

* *Concepciones y creencias.* — Flores (1998) asume la idea de que el aprender a enseñar es un proceso activo que toma como referencia el conocimiento y creencias previas sobre el conocimiento matemático y sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, centrándose en la caracterización de las creencias y concepciones y en el estudio del cambio como consecuencia de una intervención en la que se incluía el periodo de prácticas de enseñanza. En dicha intervención se considera relevante como variables dependientes el trabajo en grupo, el debate, la creación de dilemas y las características específicas de las actividades diseñadas para la innovación propuesta.

* *Conocimiento y procedimientos referidos al contenido matemático.* — Gómez (1994a, b) elabora una propuesta experimental de enseñanza de una selección relevante de los métodos de cálculo mental como alternativa a la línea tradicional reflejada en los textos y analiza los errores cometidos —incidencia y tipología— por los estudiantes para profesor antes y después de recibir la enseñanza y los clasifica en torno a los mecanismos identificables de los procedimientos que los sustentan. Por otra parte, la investigación de Guillén (1997) adopta explícitamente como marco teórico el modelo de razonamiento de Van Hiele a la enseñanza de la geometría de los sólidos y para la observación de procesos de aprendizaje, permitiéndole aportar información sobre cómo progresan los estudiantes para profesor en los niveles de razonamiento cuando se aborda el estudio en paralelo de varios conceptos geométricos relacionados con diferentes familias de sólidos.

* *Juicios sobre el proceso de resolución de problemas.* — La investigación de L. Puig (1996) toma como contexto un curso de resolución de problemas y elabora elementos de un modelo teórico de la resolución de problemas en los sistemas escolares y explora la actuación al resolver problemas de estudiantes para profesor instruidos en dicho curso organizado siguiendo el modelo. En la investigación se toman como primeras referencias el modelo de Polya¹⁰ y los componentes del modelo de actuación de Schoenfeld¹¹ y se elabora el modelo de competencia desde la semiótica de las matemáticas¹² para explorar el mundo de la pura resolución de problemas de matemáticas en el ámbito del curso específicamente diseñado. Este apartado se

complementa con el análisis de la modificación de los componentes subjetivos de la resolución de problemas de matemáticas en los estudiantes para profesor.

* *Etnomatemática*. — La investigación de Oliveras (1996), desde una referencia general proporcionada por la etnomatemática¹³, caracterizó el conocimiento matemático en diferentes contextos artesanales — desde la perspectiva de la práctica matemática en uso— como paso previo al diseño de una intervención en formación de profesores centrando el estudio en la descripción de las posibilidades y limitaciones en la generación de nuevo conocimiento. El foco de la investigación fue integrar el campo formativo e investigativo. Según Oliveras el modelo conceptual adoptado permite estudiar las condiciones de existencia contextualizada de las prácticas matemáticas y de su transmisión social, integrando diversos campos científicos (la autora lo denomina MEDIPSA, siglas de Matemática, Epistemología, Didáctica, metodología de investigación Interpretativa, Psicología, Sociología, y Antropología).

Las investigaciones revisadas en este apartado dan cuenta de los cambios producidos en las formas de conocer y en las creencias de los estudiantes para profesor como consecuencia de participar en unas experiencias específicamente diseñadas dentro del programa de formación, pero adoptando referencias varias en relación a lo que caracteriza la noción de «aprender a enseñar».

AGENDA 2: LA PRÁCTICA PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: CONOCIMIENTO Y GESTIÓN DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

La problemática

Los diferentes aspectos de la tarea de modelizar la práctica profesional del profesor de matemáticas han surgido como un ámbito de investigación como consecuencia de intentar comprender mejor los procesos de enseñanza-aprendizaje, los procesos de reforma y desarrollo del currículum. En estos diferentes procesos el papel del profesor se considera clave desde el momento en que se concibe como un profesional reflexivo. La evolución de las investigaciones conocidas como «el pensamiento del profesor» fue debida al reconocimiento del papel que desempeña en la definición de la enseñanza la forma en la que el conocimiento del contenido del profesor está organizado. Por otra parte, el objetivo de llegar a comprender mejor los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula ha puesto de manifiesto la necesidad de conceptualizar la noción de «práctica» introduciendo focos de estudio que modifican la problemática inicial centrada en la forma de conocer del profesor. La «gestión de la enseñanza-aprendizaje» se introduce así en las problemáticas de estudio como un aspecto de los intentos por conceptualizar la noción de práctica del profesor.

Objetos en esta problemática. — Los objetos de atención en las investigaciones revisadas han sido agrupados en:

- Creencias y concepciones.
- Formas de conocer el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje.
- Organización y gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El cuadro 2 recoge las investigaciones revisadas para caracterizar esta agenda de investigación.

Agenda 2. La práctica profesional del profesor de Matemáticas: conocimiento y gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas						
Objeto	Carecterísticas y propósitos: cuestiones de investigaciones	Marco conceptual/teórico	Domínios	Nivel	Autores	
Creencias/concepciones	- Análisis de relaciones entre los modos de resolver problemas y las concepciones de los profesores de matemáticas sobre las matemáticas y la enseñanza Tendencias didácticas del profesor	Esquemas y constructos cognitivos. Resolución de problemas y conocimiento profesional	Resolución de problemas	Profesores de Enseñanza Secundaria	Carrillo (1996, 1999)	
	- Análisis de las concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y sobre el papel de la resolución de problemas en el aula y explorar en qué medida las concepciones de un profesor acerca del papel de la resolución de problemas en el aula es un indicador de su tendencia didáctica en educación matemática	Esquemas y constructos cognitivos. Resolución de problemas y conocimiento profesional	Resolución de problemas	Profesores de Enseñanza Secundaria	Contreras (1998)	
	- Descripción de concepciones de los profesores sobre la evaluación y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas	Conocimiento profesional teoría curricular	Evaluación	Profesores de Secundaria	Gil (1999)	
Formas de conocer el contenido matemático y conocimiento de contenido pedagógico	- Análisis del pensamiento en acción (juicios) sobre la evaluación en matemáticas centrado en la adecuación de los juicios de los profesores sobre las producciones de los alumnos	Conocimiento práctico. Juicios, pensamiento en acción	Evaluación	Profesores de Enseñanza Secundaria	Goñi (1999)	
	- Evaluar el nivel de razonamiento geométrico e identificación de perfiles del profesor considerando su práctica en la enseñanza de conceptos geométricos	Modelo de razonamiento de Van Hiele	Geometría	Secundaria	Alfonso, Camacho, Socas, (1999)	
	- Caracterizar y confirmar concepciones y tendencias del pensamiento sobre las noticias básicas de aleatoriedad y probabilidad	Se toma como referencia la manera como se caracteriza el contenido matemático y los procesos de resolución de problemas	Aleatoriedad y probabilidad	Profesores de Ed. Primaria	Cardoso Domingo (1998)	
	- Estructura y contenido del conocimiento profesional del profesor de matemáticas en relación a la enseñanza del concepto función	Teoría de los constructos personales de Kelly Reflexión-sobre-la-acción y procesos interpretativos (Schön). La enseñanza como diseño	Concepto de función Concepto de función	Profesores de Secundaria Profesores de Secundaria	García y Llinares, (1999)	

Agenda 2. La práctica profesional del profesor de Matemáticas: conocimiento y gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas						
		- Estructura y contenido del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Relación entre el conocimiento de contenido pedagógico específico de las matemáticas y la definición de objetivos de enseñanza. Flexibilidad del uso, conocimiento y generación de dilemas de enseñanza	Conocimiento de contenido pedagógico específico de las matemáticas y dilemas	Concepto de función	Profesores de Secundaria	Llinares (2000)
Organización y gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje de nociones matemáticas		- Análisis de la práctica de profesores con el objeto de comprender el papel del conocimiento de contenido pedagógico adquirido como consecuencia de su experiencia docente	Experto-novel Fases del proceso de resolución de problemas (Polya) Principios de Dienes	Resolución de problemas	Profesores del ciclo superior de EGB (1.º ciclo ESO)	Blanco (1991/1992)
- Formas de conocer el contenido matemático relación con la gestión de la enseñanza		- Caracterizar la relación entre el conocimiento profesional y la práctica instruccional en la enseñanza de la semejanza	Enseñanza como un proceso cognitivo complejo Segmentos de conocimiento profesional	Semejanza	Secundaria	Escudero y Sánchez (1999a, b)
		- Analizar la actividad del profesor de matemáticas para organizar y conducir el proceso de enseñanza-aprendizaje	Teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard) Nociones de tarea, técnica, tecnología y teoría Praxeología didáctica del profesor	Límite de función	Bachillerato	Espinoza (1998) Espinoza y Azcárate (2000)
		- Análisis del papel del profesor en la generación de prácticas matemáticas en el aula. Relación entre el conocimiento profesional y la práctica	Integración de perspectivas cognitivas y sociocultural (antropológica) Nociones de instrumento, tecnología y transparencia en el uso de los instrumentos	Concepto de función	Ed. Secundaria	Llinares (1999, 2000)

*Características y propósitos: relación entre las cuestiones de investigación y el marco teórico**A) Creencias/concepciones*

Las creencias/concepciones¹⁴ de los profesores sobre diferentes aspectos de su práctica como son las matemáticas, el proceso de enseñanza-aprendizaje o la evaluación consideradas como constructos cognitivos que ayudan a comprender algunos aspectos de su actuación como profesores ha sido el foco de atención de algunas de las investigaciones revisadas. La idea implícita en estas investigaciones es que las creencias, consideradas como cogniciones, constituyen un aspecto importante en la caracterización de la labor del profesor, de su desarrollo profesional o en su papel en contextos de reforma. Esta importancia radica en el reconocimiento del profesor como un agente activo en todos estos procesos y bajo la premisa de que conocer mejor los diferentes aspectos que configuran el constructo «conocimiento profesional» del profesor es un primer paso en la posibilidad de modelizar su práctica en contextos institucionalizados.

Así, Carrillo (1997) y Contreras (1998) centran sus investigaciones en el ámbito de la resolución de problemas, y en particular en los profesores como resolutores de problemas de matemáticas y la importancia que conceden a la resolución de problemas en sus aulas. La posibilidad de identificar tendencias didácticas de los profesores que dieran cuenta de las relaciones entre concepciones y modos de resolver problemas de matemáticas fue estudiada por Carrillo (1997). Por otra parte, el estudio de Contreras (1998) se centra en qué medida las concepciones sobre el uso de la resolución de problemas caracterizan las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las creencias/concepciones en estos estudios se consideran como componentes cognitivos y partes del modelo mental de los profesores según son inferidas por el investigador en relación a la resolución de problemas de matemáticas.

La investigación de Gil (1999) se centra en estudiar las concepciones y creencias de los profesores sobre la evaluación. La relación entre la «evaluación» y las concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza se pusieron de manifiesto mostrando relaciones entre el contenido de estos constructos mentales de los profesores. El contexto de reforma en el que se sitúa la investigación pone de relieve la aceptación del hecho de considerar las cogniciones de los profesores referentes ineludibles en el proceso de determinar los logros de una reforma encuadradas dentro de su «pensamiento curricular».

Los esquemas cognitivos o interpretativos del pensamiento en acción de los profesores en relación a la evaluación es el foco de la investigación de Goñi (1999). En este caso el pensamiento de los profesores se chequea en relación a los principios identificados en la teoría didáctica en relación a la evaluación —problema de adecuación—. El contexto del problema de la adecuación entre la interpretación de la producción de los estudiantes siguiendo el esquema del profesor y los correspondientes al canon teórico es, según J. M. Goñi, apropiado para estudiar los esquemas cognitivos en acción de los docentes.

Las investigaciones revisadas en este apartado ponen de manifiesto la forma en la que los investigadores conciben la relación entre las creencias/concepciones de los profesores y algunos aspectos de su práctica y el contexto de reforma. En cierta medida se está asumiendo la implicación mutua entre los elementos cognitivos del profesor y su actuación, caracterizado por el proceso de dotar de significado a su mundo experiencial.

B) Formas de conocer el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje

Un aspecto del conocimiento profesional del profesor que se considera relevante en la determinación de su práctica es la forma de conocer los conceptos matemáticos. En algunos estudios estas formas de conocer se llaman «concepciones» cuando se refieren a aspectos de las matemáticas como dominio científico.

Cardeñoso (1998) se centra en la caracterización de las concepciones de los profesores sobre la aleatoriedad y la probabilidad desde una perspectiva de la epistemología constructivista del conocimiento. En esta investigación las creencias y el conocimiento son parte indivisible de las concepciones. La caracterización de las concepciones y de los modelos explicativos de la incertidumbre que mantienen los profesores es chequeado con las características del concepto matemático y en relación a los resultados de las investigaciones realizadas sobre la forma en que se conocen las nociones vinculadas al pensamiento probabilístico y al mundo de la aleatoriedad. Esta aproximación permite tipificar la población y explicitar y clasificar el pensamiento probabilístico de los profesores identificando tendencias de pensamiento.

Una indagación a través de estudios de casos sobre el conocimiento del profesor del concepto de función como un objeto de enseñanza-aprendizaje es planteado en la investigación de M. García (1997). Bajo dos supuestos, la «integración de los diferentes componentes del conocimiento profesional del profesor» que analíticamente han sido identificados y la de considerar al profesor como un «experto reflexivo» se plantea aportar nuevos significados a dichos supuestos para el caso del concepto función. El marco conceptual en el cual se encuadra esta investigación es el constructivista que para el primer supuesto se concreta en la teoría de los constructos personales de Kelly con la delimitación de la estructura y contenido del conocimiento profesional a través de las nociones teóricas de elementos y constructos considerados como los aspectos característicos y los procesos interpretativos que el profesor vincula a las nociones matemáticas consideradas como objetos de enseñanza-aprendizaje. El segundo supuesto se desarrolla a través de las nociones de reflexión sobre la acción y procesos interpretativos procedentes de las aportaciones de Schön (1983)¹⁵ (García y Llinares, 1999) organizadas a partir de la idea de considerar la enseñanza como un proceso de diseño.

El foco en la investigación de Llinares (2000b) fue la caracterización del conocimiento de contenido pedagógico específico de las matemáticas en profesores en ejercicio desde la perspectiva del «uso» del conocimiento en contextos de enseñanza. La flexibilidad en el uso del conocimiento que determinaba la definición de los objetivos de

enseñanza y la generación de dilemas de enseñanza permite profundizar en el papel desempeñado por el conocimiento del contenido matemático en el pensamiento del profesor en la enseñanza.

Por otra parte, la descripción del perfil del profesor en relación a la enseñanza de la geometría lo realizan Afonso et al. (1999) usando la caracterización de su práctica y de sus conocimientos geométricos identificados estos últimos usando el modelo de razonamiento de Van Hiele. La caracterización de los perfiles se compara con una caracterización del profesor ideal derivada de una propuesta curricular basada en la teoría de los Van Hiele.

Las investigaciones en esta problemática específica inciden en la caracterización de la forma de conocer el profesor el contenido matemático como un objeto de enseñanza-aprendizaje, centrándose en lo que se conoce y cómo se organizan los diferentes aspectos del contenido matemático y del contenido pedagógico. El supuesto implícito es la influencia de la forma de conocer el contenido matemático en la definición de la propia agenda de enseñanza del profesor —entendida como sus objetivos, planes de acción, evaluación, etc.—.

C) *Organización y gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje*

La cuestión planteada en la tarea de modelizar la práctica del profesor entendida como la complementación entre lo que hace y la forma en que se justifica en contextos institucionales puede rastrearse inicialmente en las investigaciones experto-novel que consideraban la características de las prácticas del experto como un referente para el aprendizaje del profesor novel. Estas primeras investigaciones se desarrollaban dentro del paradigma del procesamiento de la información y los elementos utilizados para describir la práctica pertenecían al mundo de la cognición.

Dentro de estas primeras referencias teóricas, Blanco (1992), como una parte de su investigación, se planteó comprender el conocimiento de contenido pedagógico del profesor de matemáticas integrado en el conocimiento práctico que los profesores van adquiriendo como consecuencia de su experiencia docente. Esta parte de la investigación realizada por Blanco encaja dentro del esquema general de las investigaciones sobre procesamiento de la información que usan el contraste entre experto y novales para examinar el conocimiento que requiere la enseñanza. En la investigación realizada, la práctica real del profesor es analizada usando como elementos analíticos los principios teóricos para la enseñanza de Dienes¹⁶ y el proceso de resolución ideal de problemas de Polya viendo las similitudes de la práctica del profesor con el modelo teórico.

Más recientemente y encajando con la creciente atención que en la comunidad internacional se le empieza a dar a la relación entre el conocimiento profesional del profesor y la práctica del profesor se ha empezado a preguntarse sobre la necesidad de conceptualizar la propia noción de «práctica». Desde una perspectiva cognitiva de la enseñanza^{17,18} y del conocimiento del profesor Escudero y Sánchez (1999a, b) se

centran en la caracterización de la relación entre la estructura de la lección según es gestionada por el profesor y la forma en que el profesor comprende el contenido matemático como un objeto de enseñanza-aprendizaje. El uso de las nociones teóricas procedentes de perspectivas cognitivas permiten plantearse la cuestión relativa a la relación entre los dominios de conocimiento del profesor que condicionan su gestión y la propia estructura de la lección. El marco conceptual adoptado permite caracterizar la enseñanza a través de diferentes segmentos de actividad definidos por los objetivos de profesor y estudiantes y así poder mirar la relación entre los diferentes aspectos del conocimiento profesional relativos a la enseñanza de un tópico concreto, los segmentos de enseñanza y el contenido matemático como una característica de la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje.

La posibilidad de complementar la perspectiva cognitiva con perspectivas socioculturales permite ampliar la problemática de la modelización de la práctica del profesor usando nociones teóricas procedentes de otras tradiciones de investigación como son las socioculturales o antropológicas. El problema de la modelización de la práctica pasa por considerar el significado dado a la noción de práctica y quién la realiza, con qué propósito y cómo. Para dar cuenta de este aspecto Llinares (2000) mediante las nociones de instrumento, tecnología y transparencia en el uso de los instrumentos intenta dar cuenta de otros aspectos de la relación entre el conocimiento profesional del profesor y su práctica. Desde este punto de vista la complementariedad entre posiciones cognitivas y socioculturales-antropológicas, y la posible ampliación de los significados dados a algunos de los elementos teóricos en ambas perspectivas permite plantearse cuestiones sobre el uso de los instrumentos de la práctica del profesor —entendidos como los problemas/actividades dados a los alumnos y los sistemas de símbolos empleados— como elemento que ayuda a la caracterización de la práctica matemática que se genera en las aulas.

La práctica del profesor también ha sido analizada desde el enfoque antropológico de lo didáctico desarrollado por Chevallard¹⁹ que sitúa el centro del análisis en el conocimiento matemático. Desde una posición antropológica general el enfoque se sitúa en las prácticas y actividades humanas. El enfoque antropológico de lo didáctico cuando se refiere a la actividad matemática construye un modelo de dicha actividad a través de la noción de praxeología matemática. Es en la investigación de Espinoza (1998) y Espinoza y Azcárate (2000) cuando se intenta aplicar el enfoque antropológico a la actividad didáctica del profesor. Con el uso de las mismas nociones teóricas procedentes de la antropología (tarea, técnica, tecnología y teoría) se busca modelizar la actividad didáctica del profesor con la noción de praxeología didáctica.

Las investigaciones centradas en la práctica del profesor muestran la variedad de planteamientos epistemológicos que pueden ser usados aportando información complementaria en los intentos por comprender y conocer científicamente la actividad didáctica del profesor.

2.- PROSPECTIVA

La revisión realizada nos ha permitido identificar unas *problemáticas* de investigación que consideraban importante la descripción de elementos cognitivos de los estudiantes para profesor y de los profesores consistentes en creencias, concepciones, formas de conocer, juicios, procesos de resolución de problemas, etc., tanto en lo relativo al conocimiento de matemáticas, sobre las matemáticas, conocimiento de contenido pedagógico específico de las matemáticas y en los procesos de resolución de problemas. Estos elementos cognitivos han sido identificados, caracterizados, y determinados sus cambios y su influencia en el desarrollo del aprendizaje o de la práctica del profesor. Básicamente la mayoría de las investigaciones realizadas en estas problemáticas adoptaba un posicionamiento cognitivo, excepto algunos intentos de ver algunas cuestiones específicas a través de enfoques más socio culturales o antropológicos (e.g. mediante el interaccionismo simbólico, la complementariedad de posiciones cognitivas y socioculturales, y con un enfoque antropológico de lo didáctico). Es de suponer que esta problemática cambiará si se modifican los marcos conceptuales y teóricos a través de los cuales se miran los fenómenos educativos en los que interviene el profesor. Es decir, en el sentido de que nuevas maneras de mirar ayudarán a definir nuevos problemas. De ahí la importancia de considerar los posibles cambios o modificaciones en los marcos conceptuales y teóricos que se usan.

Así, una gran parte de las investigaciones realizadas en nuestro país durante los últimos años y que han sido organizadas a través de las dos agendas descritas en las secciones anteriores están enraizadas en una perspectiva cognitiva. Esto conlleva que el énfasis se sitúa sobre el contenido y los procesos de pensamiento de los profesores, cómo el conocimiento está organizado y cómo se usa en contextos específicos. La perspectiva cognitiva asume que las estructuras de conocimiento del individuo y las representaciones mentales del mundo son variables en el aprendizaje y en la práctica. De ahí que el conocimiento y las creencias —algunas veces con la denominación de concepciones—, como estructuras mentales, sean los protagonistas de la mayoría de los estudios realizados con una atención sobre la forma en que se conoce o cree, cómo están organizados, cómo cambian o cómo determinan el aprendizaje y la práctica.

Posiblemente en un futuro los nuevos significados atribuidos al conocimiento y al proceso de conocer se introduzcan en las investigaciones realizadas modificando las unidades de análisis, ampliando los significados dados a los constructos teóricos utilizados o planteando nuevas maneras de ver los fenómenos educativos en los que interviene el profesor. Por ejemplo, la emergencia de las perspectivas situadas sobre la actividad y el aprendizaje ve el conocimiento como distribuido entre las personas y sus entornos, lo que incluye tanto los artefactos de la práctica como las comunidades en las que se toma parte. Desde estas perspectivas el análisis de la actividad se centra entre las interacciones entre los individuos y entre éstos y los sistemas físicos y tecnológicos en los que se está. La emergencia de estas perspectivas sitúa el «conocer» como un atributo tanto del individuo que participa en una comunidad (de aprendices en el proceso de aprender a enseñar, o de profesores de matemáticas considerando la

práctica de enseñar matemáticas) como un atributo de las propias comunidades a las que se pertenece. De ahí que el aprender a enseñar, el aprendizaje del profesor experto en situaciones de cambio de su práctica o la propia noción de práctica implica el tener que sintonizar con las condiciones y los medios materiales y del sistema social con el que interactúan. De esta manera nociones como formas de participar, comunidad de práctica, colaboración, cognición como distribuida, desarrollo de la identidad, etc., deberían empezar a ser usadas como instrumentos conceptuales y analíticos en el planteamiento del problema de investigación, el diseño y la realización de las investigaciones.

Nuevos posicionamientos epistemológicos desde los que se mira la práctica del profesor deberán introducir nuevas problemáticas —cuestiones de investigación generales y focos más específicos—. La emergencia de nuevos marcos teóricos/conceptuales conlleva la generación de nuevas cuestiones de investigación que determinan nuevas problemáticas. Así por ejemplo, las relaciones entre investigador y profesor pueden llegar a conceptualizarse de manera diferente emergiendo en sí mismo un foco de atención para la investigación centrado en dicha relación. La noción de profesionalidad —y su relación con la noción de comunidad de práctica— y la relación-tensión entre diferentes comunidades de práctica —profesor e investigador— emergen como objeto de estudio específico.

Por otra parte, la potencialidad de las nuevas tecnologías desde el punto de vista del aprendizaje y desarrollo profesional del profesor debería convertirse en un futuro en un foco de la investigación introduciéndose en las problemáticas planteadas. Las perspectivas situadas que consideran que la cognición es algo más que una propiedad de los individuos indicando que está «distribuida» a través de las diferentes personas, y diversos «artefactos simbólicos o físicos» —sistemas de representación de las ideas, software, ordenadores, contextos interactivos y multimedia— deberían empezar a tener su lugar en las agendas de investigación que podemos desarrollar. Esta manera de entender la cognición intenta buscar un equilibrio entre las actividades que desarrollan competencias individuales con actividades que reconozcan el aprendizaje compartido. Este punto de vista se apoya en la idea de que los instrumentos y sistemas de simbolización utilizados en los discursos —pensar sobre la enseñanza y el papel del profesor— transforma la cognición implicada, de ahí la necesidad de generar cuestiones de investigación que nos ayuden a comprender mejor una parte de los fenómenos educativos en los que interviene el profesor cuando intentamos modelar el mundo desde estas perspectivas teóricas.

Estas perspectivas intentan incorporar una determinada manera de ver «lo social» en el análisis de la cognición. El debate que se genera como consecuencia de la tensión entre «lo individual» y «lo social», reflejado en muchos debates en la comunidad internacional, también deberá ver su reflejo en la investigación que desarrollemos centrada en el profesor de matemáticas en Didáctica de la Matemática en nuestro país. La necesidad de encontrar planteamientos complementarios algunas veces chocarán con las diferentes maneras de concebir el mundo, el conocimiento, cómo se aprende y la práctica en los diferentes planteamientos. Posiblemente la búsqueda de complementariedad entre

algunos referentes cognitivos y socioculturales proceda del uso en las investigaciones futuras de unidades de análisis y constructos teóricos que, aunque procedentes de posicionamientos diferentes, nos permitan obtener una mejor comprensión del aprendizaje del profesor y de su práctica profesional.

Por otra parte, el desarrollo de nuevos posicionamientos epistemológicos que no sitúan como foco de atención a la cognición han empezado a reconocerse en las investigaciones sobre el profesor aquí en España. El desarrollo de planteamientos socioculturales, antropológicos o perspectivas «situadas» radicales nos permitirá tener una amplitud de «maneras de mirar» entre las que habrá que debatir lo que puede considerarse compatible o no, lo que conllevará a posibles replanteamientos teóricos, y ampliaciones o modificaciones en los supuestos epistemológicos que apoyan las decisiones de las investigaciones.

El aprendizaje y la práctica del profesor son procesos que se generan en contextos institucionalizados y que implican a personas. Las diferentes maneras en las que se conciben los contextos y las relaciones de los individuos al contexto, así como lo que se entienda por conocer, conocimiento, aprendizaje y práctica, determinará un posicionamiento inicial del investigador y por tanto un fundamento a las decisiones relativas a la realización de la investigación. Por ello, resulta imprescindible para el desarrollo de agendas de investigación bien definidas y que permitan que el conocimiento de la comunidad crezca, la identificación y caracterización de lo que se quiere estudiar y lo que se usa para ello —constructos teóricos como instrumentos conceptuales y analíticos—. El posicionamiento explícito del investigador sobre las cuestiones que dan forma al problema a investigar permiten luego una posibilidad de análisis crítico de la propia investigación, al mismo tiempo que se evitan incoherencias implícitas entre las declaraciones iniciales de la investigación y el uso real que de los constructos teóricos se realiza en las diferentes fases de la investigación.

Las cuestiones vinculadas al aprendizaje del profesor y a su práctica profesional son relativamente recientes como ámbito de investigación. Sin embargo las agendas de investigación caracterizadas nos permiten pensar en sólidos fundamentos para el desarrollo de estas agendas y de futuras agendas de investigación. Por otra parte, la generación de nuevo conocimiento desde las investigaciones inevitablemente deberá tener una repercusión en la propia práctica de formar profesores y en los procesos de enseñanza-aprendizaje en las clases de matemáticas. Por lo menos es nuestro deseo.

NOTAS FINALES

1. Puede verse una descripción en SHULMAN (1986): «Those who understand: Knowledge growth in teaching». *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14; y WILSON, SHULMAN y RICHERT (1987): «“150 different ways” of knowing: representations of knowledge in teaching». En J. CALDERHEAD (eds.): *Exploring Teachers' Thinking*. Londres: Cassell education, 104-124.
2. Puede verse una discusión sobre el status y relación epistemológica entre estos dos tipos de conocimiento en FESTERMACHER (1994): «The knower and the known. The nature of knowledge in Research on Teaching». *Review of Research in Education*, 20, 3-56; y en MCEWAN H. y BULL B. (1991): «The pedagogic nature of subject matter knowledge». *American Educational Research Journal*, 28 (2), 316-336.
3. VAN HIELE (1986): *Structure and insight*. Orlando, FL: Academic Press.
4. VINNER, S. (1983): «Concept definition, concept image and the notion of function». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305.
5. VERGNAUD, G. (1991): «La théorie des champs conceptuels». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 133-171.
6. PIRIE, S. y KIEREN, T. (1989): «A recursive theory of mathematical understanding». *For the learning of mathematics*, 9 (3), 7-11; y en KIERE, T. y PIRIE, S. (1991): «Recursion and the mathematical experience». En L. STEFFE, (ed.): *Epistemological Foundation of Mathematical Experience*. New York: Springer-Verlag, 78-101.
7. Puede obtenerse una descripción de las distintas posiciones epistemológicas adoptadas en este campo de investigación en ZEICHNER, K. y GORE, J. (1990): «Teacher Socialization». En W. R. HOUSTON, M. HABERMAN y J. SIKULA (eds.): *Handbook of Research on Teacher Education*. New York: MacMillan Pub. Co., 329-348; y en BROWN C. y BORKO H. (1992): «Becoming a mathematics teacher». En D. A. GROUWS (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Pg. Co.: 209-239.
8. BLUMER, H. (1982): *El Interaccionismo simbólico. Perspectiva y método*. Barcelona: Hora, S.A.
9. KELLY, G. A. (1955): *The psychology of personal constructs, vol. 1 y 2*. New York: Norton y Co.
10. POLYA, G. (1985): *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 13.^a edición.
11. SCHOENFELD, A. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
12. KIERAN, C. y FILLOY, E. (1989): «El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica». *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229-240.
13. GERDES P. (1996): «Ethnomathematics and Mathematics Education». En A. BISHOP et al. (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 909-944.

14. THOMPSON (1992): «Teachers' Beliefs and Conceptions». En D. A. GROUWS (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMilan, pp. 127-136.
15. SCHÖN, D. (1983): *The reflective practitioner: How professional think in action*. New York: Basic Books.
16. DIENES, Z. (1970): *La construcción de las matemáticas*. Barcelona: Vicens-Vives.
17. LEINHARDT y SMITH (1985): «Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge». *Journal of Educational Psychology*, 77, 247-271.
18. LEINHARDT y GREENO (1985): «The cognitive Skill of Teaching». *Journal of Educational Psychology*, 78 (2), 75-95.
19. CHEVALLARD, Y. (1998): «Familière et problématique, la figure du professeur». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17 (3), 17-54.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AFONSO, C.; CAMACHO, M. y SOCAS, M. (1999): «Teacher profile in the geometry curriculum based on the van Hiele Theory». En O. ZASLAVSKY (ed.): *Proceedings of the XXIII Conference of the PME*. Haifa, Israel: Israel Institute of Technology, Haifa, Israel: 2.1-2.8.
- AZCÁRATE, P. (1996): *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad*. Tesis doctoral. 1996. Granada: Comares.
- CARDEÑOSO, J. M. y PORLAN, R. (1998): «Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad». *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (1), 85-98.
- BLANCO, L. (1991): *Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de EGB y estudiantes para profesor*. Tesis doctoral. Badajoz: Servicio de publicaciones de la UNEX.
- (1992): «Aproximación al conocimiento práctico personal de los profesores de matemáticas de EGB». *Enseñanza de las Ciencias*, 10 (2), 195-200.
- CARDEÑOSO DOMINGO, J. M. (1998): *Las creencias y el conocimiento de los profesores de Primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.
- CARRILLO, J. (1997): *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de alumnos de más de 14 años. Aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis doctoral. Huelva: Servicio de publicaciones de la Universidad de Huelva, 1996.

- CASTRO, E. y CASTRO, E. (1996): «Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre estructura multiplicativa». En J. GIMÉNEZ, S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática*. Granada, España: Comares, 119-141.
- CONTRERAS, L. C. (1998): *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva.
- ESCUADERO, I. y SÁNCHEZ, V. (1999a): «The relationships between professional knowledge and teaching practice. The case of similarity». En O. ZASLAVSKY (ed.): *Proceedings of the XXIII Conference of the PME*. Haifa, Israel: Israel Institute of Technology, 2.305-2.312.
- (1999b): «Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la práctica: la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje». *Quadrante. Revista Teórica e de Investigaço*, 8, 85-110.
- ESPINOZA, L. (1998): *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto «límite de función»*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
- y AZCÁRATE, C. (2000): «Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de “límite de función”: una propuesta metodológica para el análisis». *Enseñanza de las Ciencias*, 18 (3), 355-368.
- FLORES, P. (1998): *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Tesis doctoral. Granada: Comares, 1997.
- GAIRÍN, J. M. (1999): *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.
- GARCÍA BLANCO, M. (1997): *Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Tesis doctoral. Sevilla; Kronos: Sevilla; GIEM-Universidad de Sevilla.
- GARCÍA, M. y LLINARES, S. (1999): «Procesos interpretativos y conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. Reflexiones desde la perspectiva de la enseñanza como diseño». *Quadrante. Revista Teórica e de Investigaço*, n.º 8, 61-84.
- GIL, F. (2000): *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas*. Servicio de publicaciones, Universidad de Almería. Tesis doctoral. Universidad de Granada, 1999.
- GOÑI, J. M. (1999): *La evaluación en matemáticas dentro de una visión constructivista del currículum: una experiencia*. Tesis doctoral. Universidad del País Vasco.
- GÓMEZ, B. (1995a): *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Granada: Comares, Tesis doctoral. Universidad de Valencia, 1995.
- (1995b): «Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo». *Enseñanza de las Ciencias*, 13 (3), 313-325.
- GUILLÉN, G. (1997): *El modelo de Van Hiele aplicado a la Geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia, 1997.

- GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1996): «Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por estudiantes de Magisterio». En J. GIMÉNEZ, S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática*. Granada-España: Comares, 143-170.
- (1999): «Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle». *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 253-275.
- LLINARES, S. (1996): «Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función». En J. P. DA PONTE et al. (coords.): *Desenvolvimento Profissional dos professores de matemática. Que formação?* Lisboa: Secção de Educação Matemática. SPCE, pp. 47-82.
- (1999): «Conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas. Características de una agenda de investigación». *Zetetike*, 17, n.º 12, 9-36.
- (2000a): «Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas». En J. PONTE et al. (eds.) *Educação matemática em Portugal, Espanha e Italia*. Lisboa, Portugal: SPCE-SEM, 109-132.
- (2000b): «Secondary school mathematics teacher's professional knowledge. A case from the teaching of the concept of function». *Teachers and Teaching: theory and practice*, 6 (1), 41-62.
- y SÁNCHEZ, V. (1989): «Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor». *Revista de Educación*, 290, 389-406.
- y SÁNCHEZ, V. (1996): «Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria». En J. GIMÉNEZ, S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática*. Granada-España: Comares, 95-118.
- (1998): «Aprender a enseñar, modos de representación y número racional». En L. RICO y M. SIERRA (eds.): *Actas I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática-SEIEM*. Universidad de Salamanca, España, 15-26.
- y GARCÍA, M. (1994): «Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones». *Revista de Educación*, 304, 199-225.
- MAZA, C. (2000): *Análisis de la formulación y resolución de problemas porcentuales de cambio en estudiantes para maestro*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.
- OLIVERAS, M.^a L. (1996): *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares: Tesis doctoral. Universidad de Granada, 1995.
- PUIG, L. (1996): *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares: Tesis doctoral. Universidad de Valencia, 1994.
- RICO, L; SEGOVIA, I. y GONZÁLEZ-LÓPEZ, M. J. (2000): «Representación y resolución de problemas geométricos por profesores de matemáticas en formación». *Educación Matemática*, 12 (2), 5-26.

- SÁNCHEZ, V. (1991): «Un estudio de caso mediante la teoría de los constructos personales». En C. MARCELO y otros (eds.): *El estudio de caso en la formación del profesorado y la investigación didáctica*. Sevilla: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 199- 274.
- y LLINARES, S. (1990): «El conocimiento acerca de las matemáticas y las prácticas de enseñanza». *Enseñanza de las Ciencias*, 882, 97-104.
- y LLINARES, S. (1996): «Prácticas escolares habituales y situaciones de resolución de problemas. El caso de Carlota». En J. GIMÉNEZ, S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática*. Granada-España: Comares, 223-248.
- SIERPINSKA, A. y KILPATRICK, J. (eds.) (1998): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.