ISSN: 0214-3402

PRUEBAS VISUALES EN TRIGONOMETRÍA

Visual proofs in trigonometry

Marcelino IBAÑES y Tomás ORTEGA
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática. Facultad de Educación. Universidad de Valladolid

RESUMEN: El presente trabajo comienza explicitando lo que, en este artículo, se entiende por visualización y el aspecto que aquí interesa, que no es otro que el de ayudar a probar. A continuación, se hace referencia a algunas visualizaciones en trigonometría con esa intención y se pregunta si realmente podrían considerarse como pruebas visuales. Para responder a esta pregunta se propone averiguar la incidencia que tienen, en este tipo de visualizaciones, las funciones que se asignan a las demostraciones; con este fin se describe una experiencia realizada con alumnos de tercer curso de BUP (16-17 años), en la que se exhibieron una demostración tradicional y visualizaciones con CABRI II del Teorema de Napoleón. Se termina comentando y analizando las respuestas de los estudiantes.

Palabras clave: demostración, pruebas visuales, funciones, trigonometría.

ABSTRACT: The present paper begins by defining «visualization» and its intended purpose, helping to illustrate a proof. We then study several visualizations used in trigonometry and ask ourselves if they may truly be considered visual proofs. In response to this question we analyze to what extent this type of visualizations contribute to the understanding of demonstrations: this is accomplished through the study of how sixteen and seventeen-year-old students (3rd-year BUP) responded to the traditional proof of Napoleon's Theorem and to visualizations of the same Theorem using CABRI II, followed by an analysis of the students' response to both methods.

Key words: demonstration, visual proofs, functions, trigonometry.

1. INTRODUCCIÓN

Lo visual suele relacionarse con las imágenes, las figuras, lo pictórico, lo geométrico, y aparece en oposición con lo verbal, lo abstracto, lo analítico; aquí, siguiendo a Zazkis, Dubinsky y Dautermann, (1996), consideramos la *visualización* como

> «Un acto en el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso se obtiene a través de los sentidos. Tal conexión puede hacerse en dos direcciones. Un acto de visualización puede consistir en cualquier construcción mental de objetos o procesos que un individuo asocia con objetos o sucesos percibidos por él como externos. Alternativamente, un acto de visualización puede consistir en la construcción, en algún medio externo como papel, encerado o pantalla de ordenador, de objetos o sucesos que el individuo identifica con objetos o procesos en su mente».

Uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de la Geometría es favorecer el *pensamiento visual*, en las dos direcciones señaladas en la descripción anterior, pero no en oposición al *pensamiento analítico*, sino integrando ambos en un plan de colaboración para obtener una simbiosis que, de forma global, favorezca el desarrollo del pensamiento matemático. Sin embargo, debe añadirse que, por influencia del *formalismo*, se creó un ambiente de sospecha hacia la visualización que aún perdura, quedando ésta relegada a un segundo plano, por lo que es necesario contrarrestar el desequilibrio actual, restableciendo su antiguo valor y buscando nuevas posibilidades y aplicaciones de la visualización en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

Es sobradamente conocida la importancia del sistema de representación que proporcionan los esquemas o dibujos. Cuando se representa un objeto (concepto o relación) se establece una asociación entre el objeto y su representación, que puede ser más o menos precisa, dando lugar, como señala M. de Guzmán (1996), a distintas formas de visualización. En este artículo se considera la *isomórfica*, «en la que los objetos tienen un correlato exacto en nuestra representación».

Castro y Castro, (1997) describen la naturaleza y las características del pensamiento visual, indicando que éste está fuertemente ligado a la capacidad de formación de imágenes mentales y que se usa para describir aspectos de pensamiento matemático basados en estas imágenes. Estos autores indican que es posible desarrollar una capacidad visualizadora en estudiantes de Enseñanza Secundaria y para ello señalan cinco objetivos (básicos, funcionales, generales, relacionados específicamente con el cálculo y de alto nivel), objetivos ya considerados por Zimmermann (1991) para adquirir habilidad visualizadora. En el mismo capítulo aparecen referencias de distintos trabajos de investigación en los que se establecen relaciones de imágenes visuales con el conocimiento matemático, con la formación de conceptos (Ball y Wittrok, 1993) y con los procesos de razonamiento (Ben-Chaim, 1991), pero no consideran que el pensamiento visual proporcione, por sí mismo, un proceso de razonamiento deductivo. Aquí se plantea esta hipótesis y se relaciona con los fines de la demostración. Así pues, *nuestra hipótesis de trabajo es que el pensamiento visual proporciona, por sí mismo, un proceso de razonamiento deductivo.*

2. Pruebas visuales

La visualización es muy útil en el razonamiento matemático y debemos entrenar a los estudiantes para desarrollar su capacidad de visualización, pero ¿cuál es su papel en el aprendizaje de las matemáticas? Michèle Artigue (citada en Callejo, 1994), distingue varias funciones de las representaciones gráficas en el proceso de resolución de problemas:

— *Ilustrar* el enunciado del problema.
— *Resumir* informaciones (la representación gráfica de una función, la «figura» de un problema de Geometría).
— *Estructurar el pensamiento* (esquemas conjuntistas, tablas de doble entrada, diagramas en árbol).
— *Ayudar a conjeturar* (dibujos geométricos).
— *Ayudar a probar* (contra-ejemplos, dibujos geométricos...).

Y es, precisamente, esta última la que centra nuestro interés en el presente artículo, cuya inspiración inicial fueron las figuras que publica la revista *Mathematics Magazine* en su sección *Proofs Without Words,* algunas relativas a teoremas de trigonometría, que rescatan el significado etimológico de teorema *(μ = contemplación).* En Esteban, Ibañes y Ortega, (1998), se exponen otras visualizaciones de resultados trigonométricos y en Ibañes y Ortega, (1997), se explica la construcción de este tipo de dibujos —construidos con CABRI II— y se distingue entre *trigonometría estática* y *trigonometría dinámica.*

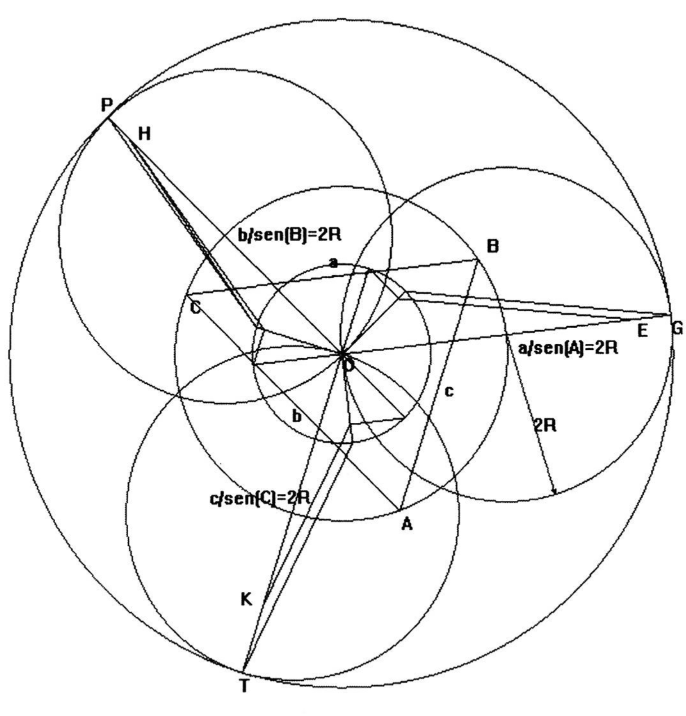

Figura 1. Teorema de los senos

Para hacerse una idea más concreta, proponemos aquí una nueva muestra de visualización en trigonometría mediante la figura 1, que se refiere al teorema de los senos.

Se traslada el ángulo A al circuncentro O, de tal forma que sen(A)=OD; también se traslada el lado *a* hasta ocupar la posición OE; uniéndose E con D y trazando una paralela por F que corta a la semirrecta OE en G, se tiene que OG=a/sen(A). Se hace lo mismo con los demás términos. La igualdad de todos ellos se comprueba con la circunferencia de mayor radio.

Aparte de las cualidades probatorias de este tipo de dibujos, a las que nos referiremos luego, es de resaltar el sentido estético que se ha pretendido en su construcción, que aunque podría considerarse accesorio, resulta muy conveniente si se busca cultivar en el alumnado una actitud positiva hacia las matemáticas. Por otra parte, ligados con esta figura pueden proponerse sendos procesos de *codificación* y *descodificación* correspondientes a las dos direcciones mencionadas en la definición de visualización, procesos de cuya importancia se hace eco el currículo de matemáticas.

Podemos preguntarnos si estos dibujos ayudan a probar aseveraciones, si sólo ayudan, o, si en realidad, constituyen auténticas *pruebas visuales*, lo que cerraría el ciclo de equivalencia entre objeto y representación visual.

Para responder a estas preguntas sería razonable averiguar cuáles, y en qué grado, de las funciones que se asignan a las «verdaderas demostraciones» son compartidas por las pruebas visuales.

A. W. Bell (1976) afirma que el significado matemático de la demostración comprende tres sentidos:

— *Verificación* o *justificación*, relativo a la verdad de una proposición.
— *Iluminación*, según la cual una buena demostración debe transmitir una idea de por qué la proposición es cierta.
— *Sistematización*, que se refiere a la organización de los resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos principales y teoremas.

Desarrollando las ideas de Bell, M. de Villiers (1990), distingue principalmente las siguientes funciones:

— *Verificación*, concerniente a la verdad de una afirmación.
— *Explicación*, profundizando en por qué es verdad.
— *Sistematización*, la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas.
— *Descubrimiento*, hallazgo o invención de nuevos resultados.
— *Comunicación*, la transmisión del conocimiento matemático.

En Ibañes, (1996), siguiendo el modelo de este autor, se desdobla la función de verificación en dos: *comprobación* y *convencimiento*, y para que la función de sistematización esté más cercana al alcance de los alumnos, se trivializa algo presentándola como *relación con otros resultados*. Sin embargo en la literatura no se han hecho pruebas prácticas conducentes a establecer el pensamiento de los alumnos al respecto, aspecto que abordamos en esta investigación, que forma parte de otra de mucha mayor envergadura.

3. Una experiencia con alumnos

Se hizo en el curso 1996/97 en el Instituto «Vega del Prado» de Valladolid, con un grupo de estudiantes de tercer curso de BUP con 16 ó 17 años. El tema elegido fue el Teorema de Napoleón, teorema que está representado en la figura 2, y cuyo enunciado es el siguiente:

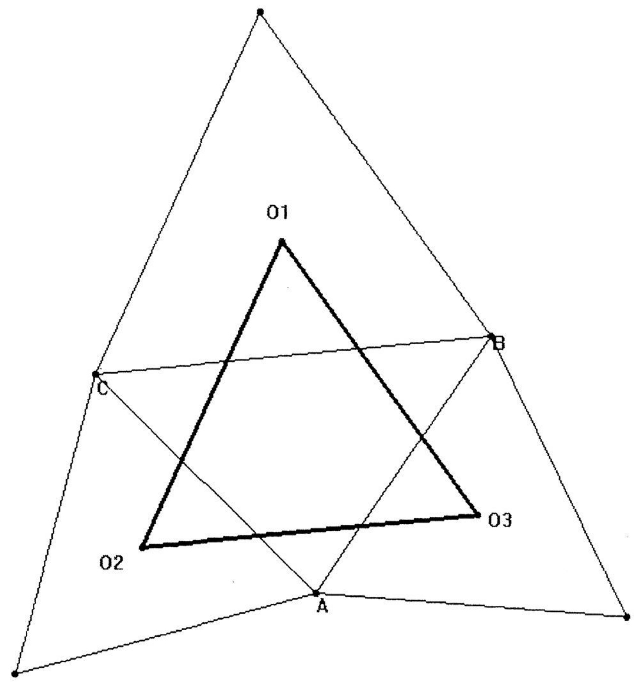

Figura 2. Teorema de Napoleón

Teorema de Napoleón. Si ABC es un triángulo cualquiera, entonces el triángulo $O_1O_2O_3$, cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados del inicial, es un triángulo equilátero.

En principio, estaban pensadas dos fases para esta experiencia, pero a la vista de las observaciones del alumnado se añadió una tercera; todas ellas se describen a continuación.

Fase 1: Demostración. El profesor expone en la pizarra una demostración del teorema, con estilo algebraico, Ibañes y Ortega, (1997b), que comprende los pasos siguientes:

— Se calcula AO_3 a partir del triángulo AO_3B. De forma similar se obtiene AO_2.
— Se aplica el teorema del coseno en el triángulo AO_2O_3, hallándose $(O_2O_3)^2$. De forma similar se obtiene $(O_1O_2)^2$.
— Se demuestra que la diferencia $(O_2O_3)^2 - (O_1O_2)^2$ es nula.

La exposición duró un período lectivo (50 minutos).

Fase 2: Visualización I. Al día siguiente, en el mismo grupo y con ayuda de CABRI II, el profesor partió de la figura 2; empleando el recurso de *arrastre,* desplazó el vértice A, luego los otros vértices, y por último desplazó los vértices de forma continua, solicitando que se observara en todo momento el triángulo $O_1O_2O_3$. Los estudiantes siguieron la exposición en una pantalla gigante de forma pasiva. La exposición duró 10 minutos. A continuación se pasó un primer cuestionario sobre los fines de la demostración.

Fase 3: Visualización II. Al cabo de unas semanas se repite la visualización, siempre en el mismo grupo, pero introduciendo algunas modificaciones sugeridas por los comentarios de los alumnos, que fueron recogidos en las respuestas del cuestionario.

En primer lugar, en vez de tomar la figura 2 como punto de partida, el profesor la construyó desde el principio. Los alumnos siguieron esta construcción a través de una pantalla gigante, a la vez que se les explicaba los detalles más elementales, como éstos:

- La construcción de un triángulo equilátero.
- La intersección de las mediatrices, bisectrices, alturas y medianas de un triángulo, definiendo cuatro puntos destacados en el triángulo.
- La coincidencia, en un triángulo equilátero, del circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro, que permite hablar del centro del triángulo.

En segundo lugar, utilizando la herramienta *Distancia y Longitud* (del cuadro de herramientas *Medir*), después de cada desplazamiento de los vértices, se midieron los lados del triángulo $O_1O_2O_3$. Con la herramienta *Animación* (del cuadro *Ver*) el desplazamiento se hace continuo y las medidas, correspondientes a una cierta tasa de variación, pueden recopilarse automáticamente utilizando *Tabular* (del cuadro *Medir*), obteniéndose como resultado las medidas de los lados que muestra la tabla 1. Esta exposición duró 20 minutos. En el siguiente período lectivo se propuso un segundo cuestionario.

	O_1O_2	O_1O_3	O_2O_3
1	4,63	4,63	4,63
2	4,67	4,67	4,67
3	4,61	4,61	4,61
4	4,58	4,58	4,58
5	4,60	4,60	4,60

Tabla 1. Medidas de los lados

4. Respuestas de los estudiantes. Estudio de casos

En el primer cuestionario, los alumnos tenían que calificar razonadamente de 0 a 3 puntos la incidencia de las distintas funciones de la demostración, tanto en la demostración como en la visualización. Las columnas segunda y tercera de la tabla 2 dan las medias obtenidas.

	Demostración	Visualización I	Visualización II
Comprobar	2,51	2,22	2,84
Convencer	2,11	2,35	2,86
Explicar	2,46	1,65	2,19
Relacionar	1,89	1,56	2,27
Descubrir	2,19	1,41	2,05
Transmitir	2,41	1,89	2,08

Tabla 2. Puntuaciones de los fines de la demostración y de la visualización dadas por los alumnos

Las observaciones que los estudiantes reflejaron, tanto en las puntuaciones otorgadas como en los comentarios sobre demostración y visualización I, se centraron fundamentalmente en las dos ideas siguientes:

— *La demostración comprueba, explica, relaciona y transmite conocimiento, pero no convence tanto.*

> Así, por ejemplo, una alumna, Ángeles, afirma que «*la demostración me ha servido para comprobar el resultado, explicarlo y relacionarlo con otros resultados. No me ha convencido mucho porque era muy complicada*».

— *La visualización convence, pero no explica ni relaciona tanto.*

> Por ejemplo, Pedro afirma que «*con la demostración no queda muy claro el convencerte del resultado; por el contrario sí queda claro con la visualización, aunque con ésta no se transmite mucho conocimiento matemático, ni se descubren relaciones entre conceptos, y tampoco se explica el resultado*».

Las calificaciones de la visualización podían considerarse satisfactorias, sobre todo, teniendo en cuenta los tiempos empleados en ambas exposiciones y la preferencia, que puede sorprender a algunos profesores, manifestada por el alumnado, de la visualización frente a la demostración, en cuanto a convencimiento se refiere. Pero después de leer las observaciones, parecía evidente la necesidad de diseñar una nueva visualización con el objeto de ver si podría mejorar las cualidades de la primera, sobre todo en lo que se refiere a la explicación y a la relación con otros resultados. La consecuencia fue la exposición, unas semanas después, de la visualización II, cuyas calificaciones medias se indican en la columna cuarta de la tabla 2. Se observa un avance en todas las funciones y, en particular, en las que pretendíamos. Las tablas 3 y 4 señalan, en sombreado, los procedimientos dominantes en cada función, en las confrontaciones demostración/visualización I y demostración/visualización II, respectivamente; se aprecia una posición final muy equilibrada para ambos procedimientos.

	Com.	Con.	Exp.	Rel.	Des.	Tra.
Demostración						
Visualización I						

Tabla 3. Demostración frente a visualización I

	Com.	Con.	Exp.	Rel.	Des.	Tra.
Demostración						
Visualización I						

Tabla 4. Demostración frente a visualización II

Los comentarios de los alumnos, posteriores a la visualización II, ponen de manifiesto, a veces de forma muy expresiva, los avances logrados con la segunda visualización. Sin embargo, estos mismos comentarios dejan ver la clase de razones aducidas, que, muchas veces, no están bien encaminadas y, por tanto, el profesorado tiene por delante una amplia labor que realizar.

A continuación se revisa la naturaleza de estas respuestas, subrayando los aspectos más relevantes para cada una de las funciones de la demostración, e ilustrando todo ello con algunos testimonios de los estudiantes. Las distintas clases de respuesta que se señalan no son ni exhaustivas (hay respuestas sin razonar suficientemente) ni exclusivas (algunos alumnos utilizan varios argumentos), pero son explicativas de la situación por sí solas.

Comprobar el resultado

El 84% considera que el resultado queda completamente comprobado mediante la visualización II y sus argumentos se basan en su propia idea de lo que es una comprobación, lo que se puede llamar *su esquema de prueba.* Las diferencias entre lo expuesto en la visualización y lo observado por los alumnos inducen a distinguir entre el *esquema de prueba expuesto* y los *esquemas de prueba observados.* En las respuestas se distinguen los siguientes:

– *Inductivo (de un caso)* (11%). Expresan la comprobación en un caso particular. Como si sólRubén: *Se ve que el triángulo obtenido era equilátero.*

Rubén: *Se ve que el triángulo obtenido era equilátero.*

– *Inductivo (de varios casos)* (14%). Expresan la comprobación en varios casos. Aprecian el dinamismo de la construcción geométrica.

Solange: *Lo hemos visto con diferentes triángulos iniciales y siempre es correcto.*

– *Inductivo (auténtico)* (14%). Son conscientes de la necesidad de una verificación universal, y al no ser posible la comprobación caso por caso, se opta por conjeturar que las experiencias concretas son generalizables.

Irune: *Podríamos comprobar el teorema para cualquier triángulo.*

– *Experimental* (11%). Precisan de la manipulación física, de las medidas, etc.; aquí, de todo el proceso, se han quedado con la medición. Para ellos son las medidas las que autentifican la construcción geométrica dándole categoría de prueba.

Sergio: *Se miden los lados y, efectivamente, el triángulo es equilátero.*

– *Deductivo* (14%). Se basa en la necesidad de una verificación universal, que se hace utilizando razonamientos universalmente válidos sobre objetos genéricos; aquí creen haber visto un encadenamiento deductivo de proposiciones hasta llegar al resultado final.

Leonor: *Hemos comprobado paso a paso desde el principio, y al final hemos obtenido que daba eso.*

En todas las categorías anteriores hay bastantes alumnos y alumnas (32%) que aluden explícitamente a «lo visual» como principal artífice del éxito.

María Paz: *Mediante la visualización veo más claramente lo que está diciendo el problema.*

También hay referencias explícitas a las transformaciones a las que se somete el triángulo inicial, que podrían considerarse tendentes a convertir dicho triángulo en uno genérico y, como consecuencia, el razonamiento adquiriría carácter universal.

Tras esta experiencia, nos preguntamos cuáles serían las inquietudes del profesorado ante una situación como la de los alumnos. Expuesta esta visualización a profesores de Enseñanza Secundaria de Matemáticas, Filosofía y Física y Química, todos ellos señalaron inmediatamente varias fallas de este procedimiento de visualización como prueba matemática:

- El resultado final parece un triángulo equilátero, ¿pero lo es realmente?
- Admitiendo que lo sea, la comprobación se hace en muchos casos, pero no en todos.
- Por otra parte, no se utiliza un razonamiento universal, aplicable a cualquier triángulo.

La dos primeras observaciones fueron expresadas, en primer lugar, por un profesor de Filosofía y la tercera por otro de Física y Química, siendo aceptadas las tres por el resto de los profesores.

Sin embargo, las preocupaciones de los estudiantes de 3.º de BUP no van por estos caminos, pues ninguno se refirió a las observaciones indicadas por los profesores y sólo una alumna expuso la primera.

> María Ángeles: *Sobre todo me sirvió la medición, pues si no se hubiera medido me podría haber parecido a simple vista y luego no ser equilátero.*

Convencerse del resultado

Las calificaciones fueron casi iguales que las de la comprobación y las respuestas muy similares. Sin embargo algunos estudiantes distinguieron entre ambas, desprendiéndose de sus comentarios que consideraban la comprobación como correspondiente al orden lógico, mientras que el convencimiento es más subjetivo y se inscribe en el terreno psicológico.

> Bárbara: *Al explicarlo de una forma que yo lo pueda entender, me convence de que el resultado es cierto.*

Explicar el resultado

Este aspecto fue poco valorado en la visualización I y mejoró notablemente en la visualización II. Las razones aducidas por los alumnos en la apreciación de esta función se centran en diversos motivos:

- *Lo visual* (11%).

> Santiago: *La explicación es eficaz porque se ve bien en los dibujos de la pantalla.*

- *La construcción de la figura* (11%).

> Miguel Ángel: *Lo explica al irte contando todo lo que se hace y ver todos los trazos.*

- *La sistematización* (14%).

> Elisabeth: *Sí, porque así sabes de dónde salen los resultados.*

- *El esquema deductivo observado* (19%).

> Silvia: *Nos explica cómo llegamos al resultado paso a paso.*

En toda la variedad de respuestas hay bastantes referencias a la valoración por parte del alumnado hacia el profesor y hacia las nuevas tecnologías:

- *El papel que juega el profesor.* Los alumnos consideran necesaria la intervención del profesor.

  Virginia: *La visualización sola no bastaría; se necesita también la explicación del profesor para completarlo.*

- *Los medios tecnológicos.* Los alumnos aprecian la utilidad de los medios tecnológicos.

  Jaime: *Bien, ya que se contaba con buenos medios para visualizarlo.*

No obstante lo anterior, debe resaltarse que hubo un considerable porcentaje de estudiantes, muchos de los más destacados, que consideraron insuficiente la explicación debido a la ausencia de auténticos argumentos.

> Irune: *Me ha convencido de que este teorema es cierto, pero no me ha explicado completamente la razón por la que esto se cumple.*

Relacionarlo con otros resultados

Fue la función más criticada en la primera visualización y su apreciación se incrementó espectacularmente en la segunda, hasta el punto de sobrepasar en aceptación a la misma función en la demostración. Sin embargo, las razones aportadas por los alumnos en sus comentarios son bastante pobres.

- El 73% son conscientes de la existencia de relaciones, pero o no las precisan o no las describen con claridad.

  David: *Relaciona los términos de mediatrices, bisectrices, triángulos equiláteros.*

- No hay ningún intento de exposición completa de las relaciones encontradas, y ni siquiera se expresa una sola relación bien definida, como podría ser «en un triángulo equilátero coinciden circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro».
- Un 14% de los estudiantes considera que no se relaciona o se hace poco.

  Cristina: *Sigo pensando que se relaciona muy poco unos conceptos con otros.*

Descubrir relaciones entre conceptos

Quizás fue la función menos comprendida, probablemente porque el marco adecuado para ello sea el de la resolución de problemas, y éste no fue en el que se realizó la experiencia. Los estudiantes interpretaron esta función en el sentido de *observar* la existencia de relaciones, o bien de *recordar* o *aprender* relaciones.

> Pablo: *Descubre cómo hallar el centro de un triángulo equilátero.*

Pero no hubo ninguna referencia, salvo en sentido negativo (Jaime: *Esto no lo vi muy claro ya que no había ningún concepto nuevo*), a la posibilidad de *encontrar nuevas relaciones,* lo que podría hacerse reflexionando sobre los resultados mencionados (por ejemplo, «¿Cómo debe ser un triángulo para que su circuncentro sea exterior al mismo?»), o bien mediante algún tipo de generalización en el enunciado, como por ejemplo, *Si sobre cada lado de un cuadrilátero se construye un cuadrado, ¿qué clase de cuadrilátero se obtiene al unir sus centros?, ¿y si se parte de un paralelogramo, de un trapecio isósceles o de un «cometa»?*

Transmitir conocimiento matemático

El profesor no había hecho ninguna referencia a lo que podía significar «transmitir conocimiento matemático», por lo que sorprende la relativa riqueza y variedad en las respuestas de los estudiantes. El 81% reconoció esta función, aportando las siguientes razones:

— *Ayuda a aprender* (22%).

> Silvia: *Sí porque me ha ayudado a entender y a aprender un teorema nuevo.*

— *Amplía los conocimientos* (30%).

> Yasmina: *Esta vez nos da más conocimiento, ya que al hacerlo se introducen los conceptos de mediatriz, baricentro, etc.*

— *Se puede aplicar en situaciones similares* (8%).

> Pablo: *Te puede ayudar a hacer otras demostraciones.*

Entre los que consideran que no se transmite conocimiento matemático no falta quien no concibe un discurso matemático sin símbolos y fórmulas, manifestando un cierto *síndrome analítico:*

> Sergio: *Al no haber expresiones matemáticas no se transmite mucho conocimiento matemático.*

En la tabla 4 se muestran las puntuaciones que dieron los alumnos a los seis fines de la demostración y de las dos visualizaciones, agrupando a aquéllos en cuatro niveles según su rendimiento académico en la asignatura: de 0 a 5, de 5 a 7, de 7 a 8, 5 y de 8, 5 a 10. Lo más destacable de los datos consignados es el fuerte aumento de las puntuaciones que los alumnos más brillantes otorgaron a las funciones de explicar y relacionar, que eran los objetivos de la segunda visualización. Asimismo, en estos alumnos, destacan los incrementos de las puntuaciones relativas a descubrir y transmitir, siendo estas cuatro funciones las menos puntuadas por ellos en la visualización I, lo que coincide con nuestro criterio.

	Demostración	Visualización I	Visualización II
Comprobar	2,0 - 2,3 - 2,9 - 2,5	2,2 - 2,1 - 2,1 - 2,4	2,6 - 2,9 - 2,7 - 2,75
Convencer	1,8 - 2,0 - 2,3 - 2,0	2,3 - 2,1 - 2,3 - 2,25	2,6 - 3,0 - 2,7 - 2,9
Explicar	2,3 - 2,3 - 2,3 - 2,75	1,7 - 2,6 - 1,5 - 0,75	2,3 - 2,2 - 2,3 - 1,6
Relacionar	1,9 - 1,9 - 2,0 - 1,5	1,6 - 1,2 - 1,8 - 1,6	2,3 - 2,1 - 2,1 - 2,6
Descubrir	1,8 - 2,3 - 2,0 - 2,6	1,5 - 1,6 - 1,4 - 1,1	1,7 - 2,3 - 1,6 - 2,4
Transmitir	2,3 - 2,2 - 2,5 - 2,6	2,2 - 2,6 - 1,5 - 1,5	2,2 - 2,2 - 2,0 - 2,25

Tabla 4. Valoración de las funciones por los alumnos, agrupados éstos por niveles

5. Conclusiones

La visualización II alcanza una puntuación relativa alrededor de un 5% mayor que la demostración, y esto a pesar de que durante dos años estos alumnos han recibido una instrucción más orientada a la demostración.

En todos los esquemas de prueba reflejados por los alumnos hay muchos, un 32%, que aluden explícitamente a lo visual como principal artífice del éxito.

En el convencimiento del resultado es donde se presenta la mayor diferencia favorable a la visualización porque ellos son capaces de entender mejor este proceso.

Los comentarios que hacen los alumnos sobre la finalidad explicativa son más ricos en la visualización que en la demostración, aunque varios piensan que la visualización no bastaría por sí misma.

No hubo ninguna referencia, salvo en sentido negativo, a la posibilidad de *encontrar nuevas relaciones* con otros conceptos, aunque la mayor parte de los alumnos cree que sí existen.

Hay un manifiesto claro sobre la riqueza didáctica de las «pruebas visuales» por parte de los alumnos, ya que, según ellos, éstas ayudan a aprender, amplían los conocimientos y se pueden aplicar en situaciones similares.

Las preocupaciones que tienen los estudiantes sobre las visualizaciones son muy diferentes de las que tienen los profesores.

Los alumnos más brillantes son los que más incrementan sus puntuaciones en la visualización II en las cuatro funciones que ellos mismos habían valorado menos en la visualización I.

Por todo lo anterior, parece claro que el pensamiento visual sí que proporciona un proceso de razonamiento deductivo, y para los alumnos estas pruebas cumplen los mismos fines que las demostraciones. Por tanto, las pruebas visuales deben ser consideradas como instrumentos didácticos integrados en el aula de matemáticas, y pueden ser utilizadas con el convencimiento de que una implementación adecuada de las mismas, incluso, mejorará los fines de la demostración matemática, lo que nos inclina a recomendar su utilización en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BELL, A. W. (1976): «A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations». *Educational Studies in Mathematics.*

CALLEJO, M. L. (1994): «Les représentations graphiques dans la résolution de problèmes: une expérience d'entraînement d'étudiants dans un club mathématique». *Educational Studies in Mathematics,* 27, 1-33.

CASTRO, E. y CASTRO, E. (1997): «Representaciones y modelización». En L. RICO (coord.). *La Educación Matemática en la Educación Secundaria.* Barcelona: Horsori.

ESTEBAN, M.; IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1998): *Trigonometría.* Madrid: Síntesis.

GUZMÁN, M. de (1996): *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisis.* Madrid: Pirámide.

IBAÑES, M. (1996): «Alumnos de bachillerato interpretan una demostración y reconocen sus funciones». *Uno,* 13, 95-101.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1997a): «Trigonometría en imágenes». *Actas 8as Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM),* Salamanca, 303-306.

IBAÑES M. y ORTEGA, T. (1997b): «La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación Secundaria». *Educación Matemática, vol. 9, n.º 2,* México, D.F., 65-104.

NELSEN, R. B. (1993): *Proofs without words. Exercises in visual thinking.* Washington: The Mathematical Association of America.

VILLIERS, M. de (1993): «El papel y la función de la demostración en Matemáticas». *Epsilon*, 26, 15-30.

ZAZKIS, R.; DUBINSKY, E. y DAUTERMANN, J. (1996): «Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D4». *Journal for Research in Mathematics Education,* 27 (4), 435-457.

