ALGUNOS PROBLEMAS «NUEVOS» DE GEOMETRÍA EXPERIMENTADOS EN LA CLASE

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
I.N.B. Isabel de Castilla. Ávila
Escuela Univ. de Formación del
Profesorado, Ávila

Exponemos en este artículo una selección de problemas que hemos propuesto y resuelto con nuestros alumnos de tercero BUP sobre Geometría y Trigonometría y otros tópicos.

Estos «nuevos» problemas se encuadran dentro de una experienca didáctica que creemos interesante en el aula.

Algunos fueron tratados con ordenador como una herramienta auxiliar de investigación, de resolución y conjeturación de teoremas con relación a los temas tratados en ellos.

I. *Problemas en los que intervienen las medias armónica, geométrica, aritmética y cuadrática de dos números reales positivos. Triángulos medios respecto de lados y respecto de ángulos*

Problema 1.— Se define una media m(a, b) como una función de dos variables positivas a y b satisfaciendo las siguientes propiedades:

(1) Intermedia $\min(a, b) \leq m(a, b) \leq \max(a, b)$

(2) Simetría $m(a, b) = m(b, a)$

(3) Homogeneidad $m(a,b) = a\, m\left(1, \frac{b}{a}\right)$

Siete son las medias más usuales a saber:

Aritmética $A(a, b) = \dfrac{(a+b)}{2}$

Geométrica $G(a,b) = \sqrt{ab},$

Armónica $H(a, b) = \dfrac{2ab}{a+b}$

Logaritmica $L(a, b) = \dfrac{(b - a)}{(\ln b - \ln a)}$

Media cuadrática $RMS\ (a, b) = \left[\dfrac{a^2 + b^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$

Contra-armónica $C(a, b) = \dfrac{a^2 + b^2}{a + b}$

Heroniana $He(a, b) = \dfrac{(a + \sqrt{ab} + b)}{3}$

Idéntrica $I(a, b) = \left(\dfrac{a^a}{b^b} \right)^{\frac{1}{a - b}} / e$

Máximo Max(a,b),

Mínimo Min(a,b).

a) Probar por métodos algebraicos elementales la siguiente desigualdad:

$$Min(a, b) \leq H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b) \leq RSM(a, b) \leq Max\ (a, b)$$

con la igualdad, si y sólo si $a = b$.

b) Demostrar el teorema anterior utilizando construcciones geométricas utilizando como figura fundamental el triángulo rectángulo.

Véase un artículo referente a la construcción geométrica de las medias aritmética, armónica, geométrica y cuadrática que, aparecen en las revistas siguientes:

American Mathematical Monthly, Octubre, 1986 y Revista de la Sociedad Castellana de Profesores de «Matemáticas», en su número 9.

Observación.—

Por metodos de análisis (cálculo diferencial e integral aplicados a las funciones apropiadas de tipo hiperbolico, junto, con otros recursos se puede probar una desigualdad, en las que intervengan las siete medias antes definidas, ver Amer. Math. Monthly.

Problema:

a) Si x es real mayor que cero se puede probar:

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{Shx}}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x}} < \mathrm{thx} < x < \mathrm{shx} < \frac{1}{2}\mathrm{sh2x}, \text{ con}$$

$$\mathrm{shx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{thx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

b) Tomando las funciones recíprocas en (1), y dando a $x = \ln \sqrt{b/a}$ donde $o < a < b$, multiplicando por 1/2 (b-a), tenemos

$$(2)\qquad \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

es decir, respectivamente, la media armónica, la media geométrica, la media logarítmica, la media aritmética y la media cuadrática.

Las funciones citadas antes son el seno hipérbolico y la tangente.

Aplicación.— I) *Triángulos rectángulos medios, respecto de lados.*

Dado el triángulo rectángulo, de lados, $a > b \geq c$, y dado el número real r, diremos que el triángulo es tipo «r-medio», respecto de los lados si b es la media r-sima de a y c, es decir,

$$b = \left(\frac{a^r + c^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

Caracterizamos los triángulos rectángulos, en los cuales, $r = -\infty$ (triángulo mínimo); $r = -1$ (triángulo armónico); $r = 0$ (triángulo geométrico o aúreo); $r = 1$ (triángulo aritmético); $r = 2$ (triángulo cuadrático).

Resolución, discusión e interpretación.—

1) Si $r = -\infty$ entonces, $c = \min(a,c) = b$, y como el triángulo es rectángulo, de $a^2 = b^2 + c^2$, se tiene que: $b = C$

$$a^2 = 2b^2\,;\; a = b\sqrt{2}$$

Es decir, que el triángulo rectángulo es isósceles, y de aquí sus ángulos son:

$$A = 90^\circ;\; B = C = 45^\circ$$

2) Si $r = -1$, tenemos, de las dos relaciones siguientes

$b = \dfrac{2ac}{a+c}$ y $a^2 = b^2 + c^2$, y, de aquí, después de hacer operaciones y poner

$x = \dfrac{a}{c}$, se llega a la ecuación de cuarto grado, siguiente:

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$$

Un buen ejercicio complementario con relación a esta ecuación sería el estudio de si tiene o no raíces reales y cómo hallarlas.

3) Si $r = 0$ (triángulo rectángulo geométrico), es decir $b = \sqrt{ac}$.

De aquí, y de $a^2 = b^2 + c^2$, se llega, a que

$$a^2 - ac - c^2 = 0;$$

Si $x = \dfrac{a}{c}$, obtenemos, la ecuación de segundo grado en x, siguiente: $x^2 - x - 1 = 0$ (ecuación que define al número de oro), es decir,

$$\frac{a}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Como complemento de esta circunstancia se podría proponer a los «alumnos» el tópico del número «de oro» o la «divina proporción» en la Naturaleza y en las Ciencias.

También se podría determinar los ángulos del «triángulo de oro o geométrico», así, como la expresión matemática de su área y de su perímetro.

4) $r = 1$ (triángulo aritmético) es el que $b = \dfrac{a+c}{2}$, y, es un triángulo rectángulo, es decir, $a^2 = b^2 + c^2$. De ambas expresiones se deduce que,

$\dfrac{b}{c} = \dfrac{4}{3}$ y $\dfrac{a}{c} = \dfrac{5}{4}$. Esto es, que todos los triángulos aritméticos son semejantes al triángulo rectángulo pitagórico, 3, 4 y 5.

Determinar el área y perímetro de todos estos triángulos.

5) $r = 2$ (triángulo rectángulo cuadrático).—

Es aquél en que $b = \left(\frac{a^2 + c^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (media cuadrática de los lados a y c), y es un triángulo rectángulo, es decir, $a^2 = b^2 + c^2$. De ambas expresiones se deduce que,

$$b = c\sqrt{2}. \quad \text{y} \quad a = c\sqrt{3}.$$

Calcular sus ángulos, el área y el perímetro.

Nota.— Como aplicación geométrica se podría proponer a los alumnos el dibujar con regla y compás (herramientas euclidianas), todos los números irracionales que aparezcan y todos los triángulos anteriores.

Lineas posibles de investigación de este problema en el aula

1) Generalización de este problema para triángulos acutángulos y obtusángulos.
2) Triángulos rectángulos r- medios respecto de los ángulos $\pi/2 = A \geq B \geq C$ donde, el ángulo B es la media r-sima de A y C:

$$B = \left(\frac{A^r + C^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

3) ¿Existe algún triángulo rectángulo que sea r- media respecto de los lados y de los ángulos?

4) ¿Existe algún triángulo rectángulo que sea r- media respecto de los lados, y s-media respecto de los ángulos.

5) Enunciado de los problemas anteriores para triángulos acutángulos y obtusángulos.

6) Estudiar todos los problemas anteriores en el caso particular de que r sea un número entero arbitrario.

Nota.— En la generalización del problema de triángulos medios respecto de los lados, para triángulos acutángulos y obtusángulos se ha de tener en cuenta que:

Si a, b, c son los lados de un triángulo, entonces:

si $a^2 < b^2 + c^2$, el triángulo es acutángulo; y
si $a^2 > b^2 + c^2$, el triángulo es obtusángulo.

II. *Demostraciones geométricas elementales por reducción al absurdo o por contradicción*

Aprovechando el título del libro ¿Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas?, de D. Solow, experimentamos:

La idea de una demostración por contradicción o reducción al absurdo es el suponer que la proposición hipótesis es verdadera y suponer que la tesis es falsa. Ya que cuando demostramos que la proposición A implica B es verdadera en todos los casos excepto cuando A es verdadera y B es falsa. En una demostración por reducción al absurdo se supone que lo anterior sucede, y en el proceso de la demostración se llega a una contradicción con algún teorema ya establecido.

Pero surgen las siguientes preguntas:

a) ¿Qué contradicción debemos buscar?
b) ¿Cómo utilizar en la prueba de que A es verdadero y B es falso para obtener la contradicción?
c) ¿Cuándo emplear este método de demostración de un teorema matemático y no otro?

Puede verse una discusión interesante de este tema en el capítulo 8 del libro antes citado.

Ejemplos de este método que se utiliza en la enseñanza elemental son los siguientes:

a) Demostrar que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, Φ , $\sqrt{2} + \sqrt{3}$,
son números irracionales.

b) Demostrar que un triángulo rectángulo tiene un sólo ángulo recto.
c) Demostrar que un triángulo obtusángulo tiene un sólo ángulo obtuso.
d) Demostrar que en todo triángulo existe al menos un ángulo menor o igual de 60 grados.

Todos estos problemas fueron experimentados y resueltos con los alumnos de 1 y 3 de B.U.P, con las adaptaciones metodológicas y didácticas adecuadas, al nivel real de conocimientos de los alumnos.

Problema: Sea ABC un triángulo rectángulo con catetos $b > c$ e hipotenusa a. Sean B, C y $A = 90$ los ángulos opuestos respectivamente, a los lados anteriores.

Probar: a) $B + C = 90$; b) que entre los ángulos B y C se tiene necesariamente la siguiente desigualdad: $B \geq 45 \geq C$.

Resolución:

a) Como en todo triángulo plano se tiene: $A + B + C = 180$ y aquí, $A = 90$, es claro que de ambas se deduce que $B + C = 90$

b) Hagamoslo por reducción al absurdo.

Suponer que son verdaderas una cualquiera de las dos proposiciones siguientes:

$$45 > B \geq C \qquad ó \qquad B \geq C > 45,$$

y concluir, que ambas dan contradicción.

Otros ejercicios, problemas y cuestiones y conjeturas experimentados en clase:

Dadas las siguientes proposiciones o asertos: conjeturas plausibles a verificar si son o no ciertas, en caso afirmativo, dar una demostración y en caso negativo dar un contraejemplo:

1) ¿Existe algún triángulo plano cuyos ángulos sean todos menores de 60?

2) ¿Existe algún triángulo con un ángulo de 60 y los otros dos menores de 60?

3) ¿Existe algún triángulo con un ángulo de 60 y los otros dos mayores de 60?

4) ¿Existe algún triángulo con dos ángulos de 60 y el otro ángulo menor de 60?

5) ¿Existe algún triángulo con dos ángulos de 60 y el otro ángulo mayor de 60?

6) ¿Dado el triángulo acutángulo de ángulos $A > B > C$, es cierta o no la siguiente conjetura:

$$90 > A \geq 60 \geq B \geq C \qquad ó \qquad 90 > A \geq B \geq 60 \geq C?$$

7) Sea un triángulo acutángulo en el cual el más pequeño de sus ángulos es 60. ¿Es necesariamente el triángulo equilátero?.

8) Sea T un triángulo acutángulo de lados $a > b > c$ y ángulos $90 > A \geq B \geq C$. Si entre los lados se verifica la relación siguiente:

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab$$

¿Es el triángulo equilátero?

9) Sea T un triángulo obtusángulo de ángulos A, B y C. ¿Es cierto o no que entre sus ángulos se ha de verificar una de las acotaciones siguientes:

$$A > 90 > B \geq 60 \geq C \qquad ó \qquad A > 90 > 60 \geq B > C?$$

Nota.— Si en todos los asertos anteriores verdaderos tomamos en la desigualdad establecida cualquier línea trigonométrica (seno, coseno, tangente, etc), que sabemos conserva o invierte en sentido de la desigualdad, se obtiene una desigualdad métrica entre los lados del triángulo. Estas desigualdades también se pueden obtener directamente manejando hipótesis y conjeturas métricas entre los lados.

III. *Demostraciones geométricas por el método progresivo-regresivo, o el método directo-recíproco*

Recordemos de la lógica elemental que para demostrar que la proposición o aserto o enunciado P implica Q es verdadero dependerá de los valores lógicos posibles que tengan P y Q. Existen cuatro posibilidades a considerar:

1.— P es verdadera y Q es falsa.
2.— P es verdadera y Q es verdadera.
3.— P es falsa y Q es verdadera.
4.— P es falsa y Q es falsa.

El primer paso para realizar una demostración en matemáticas es el de identificar las proposiciones P (hipótesis) y Q (tesis).

Problema 1

1) Si el triángulo rectángulo XYZ con lados x, y e hipotenusa z tiene un área de $z^2/4$, entonces el triángulo es isosceles.

En efecto, como $xy/2 = x^2/4$ y de $x^2 + y^2 = z^2$ se llega al sustituir que $(x^2 - 2xy + y^2) = 0$ y de aquí, $x = y$. Por tanto, el triángulo es isósceles.

Problema 2:

Si el triángulo rectángulo RST con catetos r y s, e hipotenusa t, satisface $t = \sqrt{2rs}$, entonces, el triángulo RST es isósceles.

En efecto, por hipótesis tenemos que $t = \sqrt{2rs}$, con lo que $t^2 = 2rs$, es decir, $1/4\, t^2 = 1/2\,(rs)$. Y, de aquí, estamos en las condiciones del teorema 1, es decir, la hipótesis y la tesis son verdaderas, luego el triángulo RST es isósceles.

Ejercicio.— Demostrar que si el triángulo rectángulo UVW con lados u y v, e hipotenusa w, satisface $\mathrm{sen}(U) = \sqrt{\dfrac{u}{2v}}$, entonces el triángulo UVW es isósceles:

a) Utilizando la definición de triángulo isósceles; b) Verificando la hipótesis del problema 1; c) verificando la hipótesis del problema 2.

IV.— *Problemas de Geometría vectorial afín y analítica que se utilizan los conceptos siguientes: simetría, baricentro de un segmento, baricentro de un triángulo, homotecia (o semejanza en posición de Thales para dos triángulos), traslación e isometría*

La figura 1 es una fuente de inspiración de muchos problemas sencillos de enunciado, y, fáciles de resolver por los elementales recursos que se utilizan, y de excelente manipulación mediante regla y compás, y con ordenador.

Problema 1.— Dado el triángulo ABC. Sea X un punto cualquiera de su plano. Sean los puntos A' = A(X), B' = B(X), y C' = C(X), los simétricos del punto X, respectivamente, de los puntos A, B y C. Demostrar que el triángulo A'B'C' es directamente semejante al triángulo ABC en la razón 2: 1.

En efecto, utilizando vectores, tenemos que si A $\longleftrightarrow$ a, B $\longleftrightarrow$ b, C $\longleftrightarrow$ c, son los vectores de posición de los vértices del triángulo ABC, respecto de un origen O, se tiene que:

Si A' $\longleftrightarrow$ a, B' $\longleftrightarrow$ b', C' $\longleftrightarrow$ c' y X $\longleftrightarrow$ x son los vectores de posición de los puntos indicados se tiene que, por definición de punto medio:

$$a = \frac{x + a'}{2}; \qquad a' = 2a - x;$$

$$b = \frac{x + b'}{2}; \qquad b' = 2b - x;$$

$$c = \frac{x + c'}{2}; \qquad c' = 2c - x;$$

Verifiquemos la semejanza entre los triángulos ABC y A'B'C' que están en posición de Thales:

$$\overrightarrow{A'B'} = b' - a' = 2b - x - (2a - x) = 2(b - a) = 2\overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{A'C'} = c' - a' = 2c - x - (2a - x) = 2\,(c - a) = 2\overrightarrow{AC};$$

$$\overrightarrow{B'C'} = c' - b' = 2c - x - (2b - x) = 2\,(c - b) = 2\,\overrightarrow{BC}.$$

como queríamos demostrar. (fig. 1).

Nota.— Se puede generalizar este problema a todo tipo de polígonos de n lados, regulares o no. Ocurren cosas sorprendentes.

Problema 2.— Sea Y otro punto cualquiera del plano que contiene al triángulo ABC. Con la misma notación y construcción que antes, sea el triángulo A'* = A(Y), B'* = B(Y) y C'* = C(Y) como sus vértices.

a) Probar que el triangulo A'*B'*C'* es isométrico por una traslación y semejánte al triángulo A'B'C'.

b) Probar que el cuadrilátero XYG'G es un paralelogramo, siendo G' y G'* respectivamente, los centros de gravedad, de los triángulos A'B'C' y A'*B'*C'*.

Problema 3.— (Redes de triángulos).— Dado el triángulo T_1 dibujado en un plano. Con los puntos medios de este triángulo se forma el triángulo de «puntos medios» T_2, inscrito, en t_1. Y con T_2, se hace la misma operación que con T_1, y así hasta el infinito. (fig. 2).

Probar:

a) T_2 es semejante a T_1, y de aquí que, todos los triángulos T_n son semejantes.

b) El perímetro de T_2 = 1/2 del perímetro de T_1, y de aquí, el perímetro de T_{n+1} = 1/2 del perímetro de T_n.

c) El área de T_2 = 1/4 del área de T_1, y de aquí, el área de T_{n+1} = 1/4 del área de T_n.

d) Dado T_2, existe un único triángulo T_1 cuyo triángulo de puntos medios es T_2. Lo mismo, dado T_{n+1} existe un único triángulo T_n cuyo triángulo de puntos medios es T_{n+1}.

e) El área de T_2 es la mínima entre todos los triángulos T_2' que están inscritos en T_1 y cuyos vértices dividen a los lados de T_1 en una proporción fija, cíclicamente.

Si el triángulo de puntos medios de T_2 es T_3, y sucesivamente lo mismo para T_4, T_5... y T_n, T_{n+1}..., obtenemos así una red de triángulos convergentes al centro de gravedad o baricentro de T_1 con rapidez o crecimiento geométrico. Recordemos que el centro de gravedad de un triángulo cuyos vértices son los puntos P_i (x_i, y_i), con i = 1, 2, 3, es el punto

$$G = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)}{3}$$

g) Las medianas de todos los triángulos T_n, n = 2, 3..., son las mismas medianas que las de T_1.

h) El centro de gravedad de T_n, n = 2, 3..., coincide con el centro de gravedad de T_1.

i) Concluir, de los apartados anteriores necesarios que, la sucesión o red de triángulos T_n, converge al centro de gravedad de T_1.

h) Describir la situación cuando el triángulo T_1 es rectángulo; cuando T_1 es isósceles; cuando T_1 es equilátero.

Problema 3.— Demostrar sintéticamente, vectorialmente o analíticamente:

a) Toda mediana a un triángulo le divide en dos triángulos de la misma área: la mitad del área del triángulo dado.

b) El centro de gravedad o baricentro de un triángulo divide al triángulo en tres triángulos de área igual: la tercera parte del área del triángulo dado. ¿Será cierto este teorema para un polígono cualquiera?. ¿Cómo definiríamos una línea mediana de un polígono cualquiera?.

c) El centro de gravedad de un triángulo, los tres puntos medios de sus lados, y los tres vértices de un triángulo dado, forman seis triángulos interiores al triángulo dado de la misma área: la sexta parte del área del triángulo dado. (fig. 3).

Nota.— Todos los problemas anteriores y los que siguen fueron manipulados geométricamente en el papel, y con el ordenador por parte de los alumnos. Se hicieron trabajos de dibujo y programas con ordenador de estos problemas muy interesantes, completos y llenos de imaginación y creatividad.

BIBLIOGRAFÍA

(1) D. SOLOW: *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas.* Limusa. México, 1987.

(2) H. EVÉS: *Estudio de las Geometrías,* I, II. Uteha. México, 1969.

(3) R.A. Johnson: *Advanced Euclidean Geometry.* Dover. N. York, 1960.

(4) H.S.M. COXETER y S.L. GREITZER: *Geometry Revisited.* Randon House. N.Y. 1967.

(5) H.S.M. COXETER: *Introduction of Geometry.* Wiley. N.Y. 1969.

(6) D. PEDOE: A course of Geometry for colleges and universities. University Press. Cambridge, 1970.

(7) E. ROUCHE y Ch. COMBEROUSSE: *Traité de géométrie.* Gauthier Villars. París, 1899.

(8) J. HADAMARD: *Leçons de géométrie élémentaire,* I, II. Gauthier Villars. París, 1937.

(9) J.B. ROMERO MAÁRQUEZ: *Algunos problemas de geometría analítica con ordenador.* (en prensa). XIII Jornadas Hispanolusas sobre Matemáticas. Valladolid, 1988.

(10) E.H. BARRY: *Introducción a las transformaciones geométricas.* Cecsa. Barcelona, 1968.

(11) M. QUEYSANNE y A. REVUZ: *Geometría.* Cecsa. Barcelona, 1976.

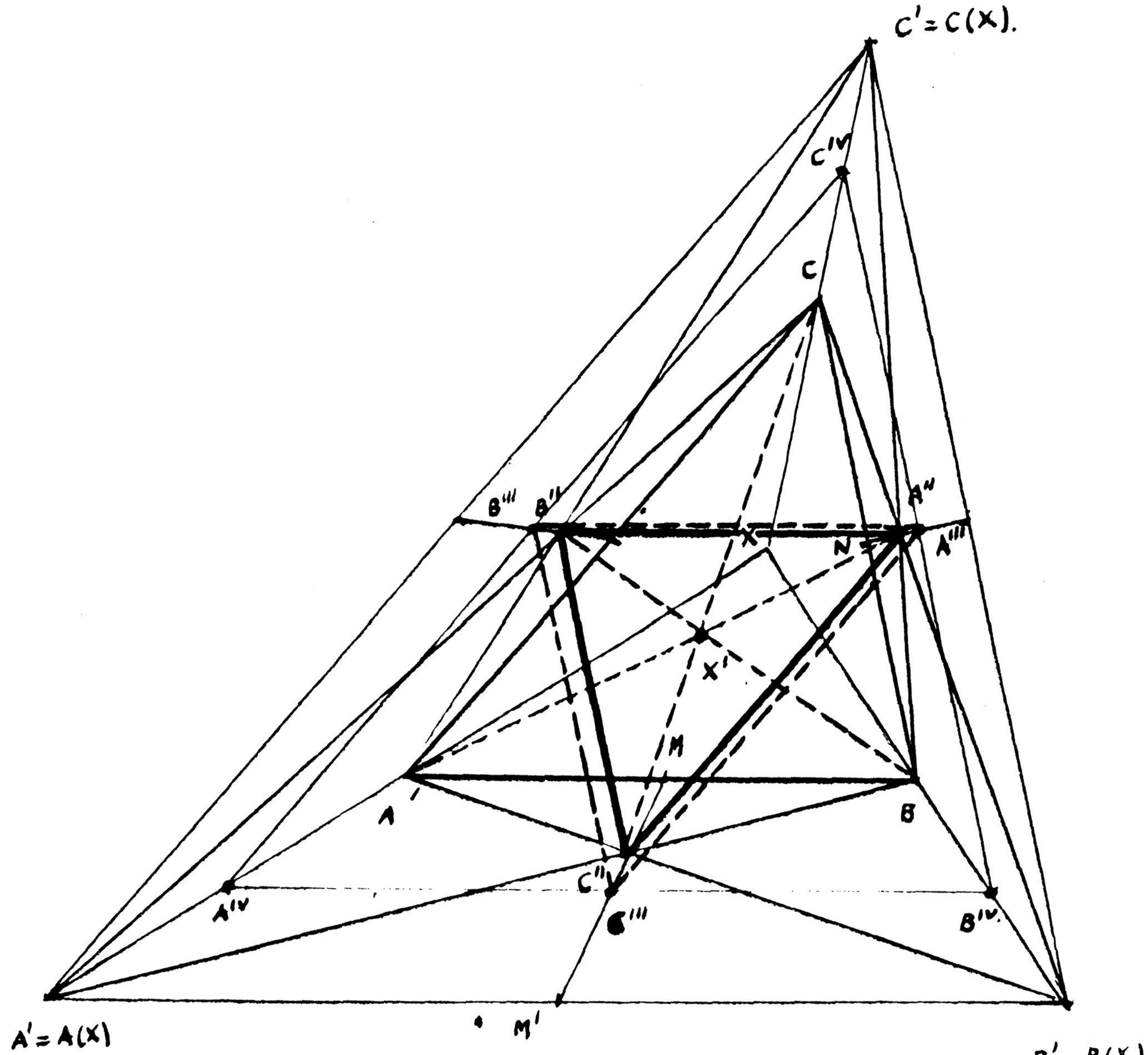

Figura 1

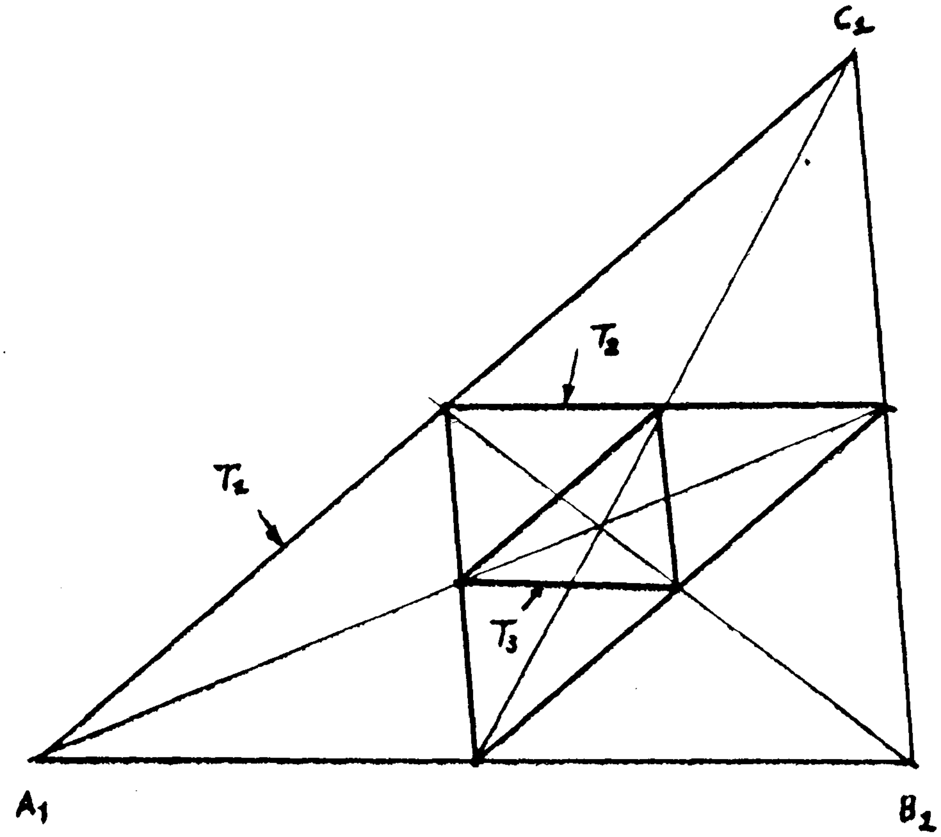

Figura 2

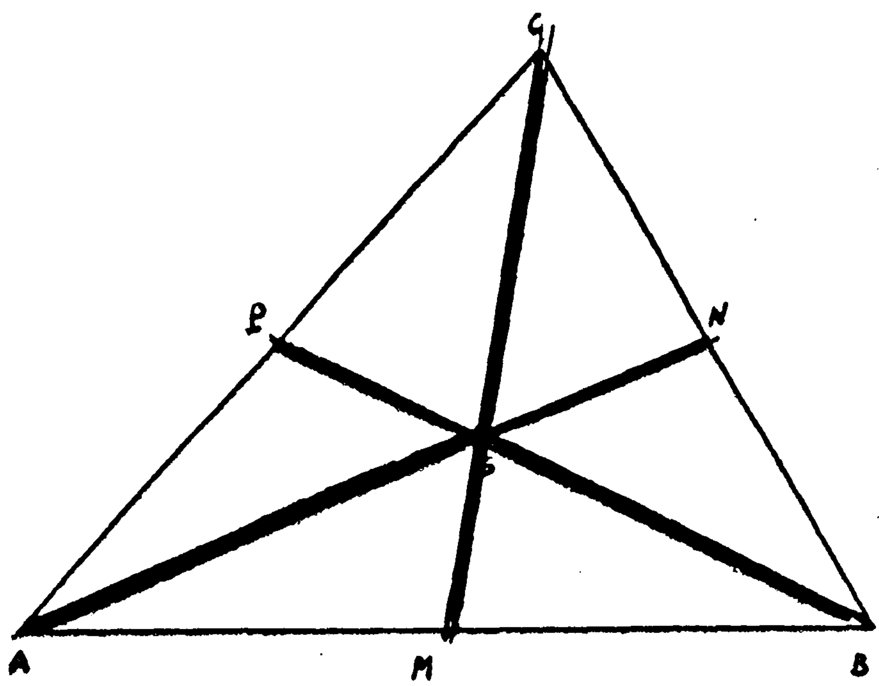

Figura 3