Ediciones Universidad Salamanca

Aula
Revista de Pedagogía
https://revistas.usal.es/tres/index.php/0214-3402

Introduciendo ecuaciones e inecuaciones a través de problemas aritméticos con apoyo visual

Introducing Equations and Inequations throught Arithmetic Problems with Visual Support

Estefanía Pacheco-Cáceres
Universidad de Granada
https://orcid.org/0009-0006-6528-3349 epacheco@correo.ugr.es

María del Carmen Pérez-Martos
Universidad de Granada
https://orcid.org/0000-0001-8673-1194 mcperezmartos@ugr.es

Cristina Ayala-Altamirano
Universidad de Málaga
https://orcid.org/0000-0002-9165-9470 cristina.ayala@uma.es

ARTICLE INFO

Palabras clave
Pensamiento algebraico; ecuaciones; inecuaciones; educación primaria.

RESUMEN

Este trabajo describe parte de un experimento de enseñanza, en el marco de la investigación de diseño, dirigido a promover el pensamiento algebraico de estudiantes de primaria. El objetivo de este artículo es identificar las estructuras que evidencian en problemas con apoyo visual, de ecuaciones e inecuaciones. Analizamos las respuestas escritas y orales de dos grupos de estudiantes, de 3.º y 4.º de primaria, atendiendo a los procesos de traducción de problemas a lenguaje algebraico alfanumérico. Los resultados muestran que el estudiantado logró captar diversas estructuras y establecer la equivalencia entre sus partes y las operaciones matemáticas, sin embargo, la expresión de las inecuaciones resultó ser más compleja en comparación con las ecuaciones. Concluimos que el apoyo visual en los problemas favorece un pensamiento flexible, permite percibir estructuras matemáticas y justificar la equivalencia de estas, siendo una herramienta efectiva y cercana para el estudiantado.

Keywords
Algebraic thinking; equations; inequalities; primary education.

ABSTRACT

This paper presents the findings of a teaching experiment conducted within the design research framework to promote algebraic thinking in primary school students. The aim of this paper is to identify the structures they recognize in problems involving the visual representation of equations and inequalities. The written and oral responses of two groups of students, comprising third and fourth graders from primary school, were subjected to analysis, with particular attention paid to the processes of translating problems into algebraic alphanumeric language. The findings indicate that the students were able to comprehend various structures and establish the equivalence between their components and mathematical operations. However, the expression of inequalities proved to be more complex in comparison to equations. It can be concluded that the visual representation in the problems facilitates flexible thinking, enables the perception of mathematical structures and justifies their equivalence, thus proving to be an effective and accessible tool for the students.

CC BY NC SA

Recibido, 30/09/2024. Revisado, 21/10/2024. Aceptado, 13/01/2025. Publicado, 10/12/2025
e-ISSN: 2174-0925

1. Introducción

Actualmente, diversos currículos de educación matemática promueven la enseñanza del álgebra desde educación primaria o infantil (p. ej. Ministerio de Educación de Chile, 2012; Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022; National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 2003). En estas propuestas curriculares, y en las investigaciones en didáctica de la matemática, el objetivo es asociar el álgebra a modos de pensar más que al uso del simbolismo algebraico (Kieran, 2011). Pensar algebraicamente implica, entre otras cosas, generalizar, percibir estructuras algebraicas, analizar las relaciones entre las cantidades y resolver problemas (Kieran, 2022). La expresión de las ideas algebraicas se puede representar de modo tradicional (letras) o no, ya que el estudiantado puede recurrir a modos personales (Radford, 2018).

En el caso del currículo español (MEFP, 2022), el álgebra se ha introducido recientemente en educación primaria y se trata dentro del sentido algebraico. Una de las competencias específicas que se deben desarrollar en relación con este sentido es "interpretar situaciones de la vida cotidiana proporcionando una representación matemática" (p. 24487), la cual se considera el primer paso en la resolución de problemas. En este primer paso, la clave para una buena interpretación de la situación son la representación y la visualización del problema, que puede incluir mensajes verbales y visuales (dibujos, imágenes o fotografías).

En el ámbito de la resolución de problemas, las representaciones visuales, cuando se emplean de forma apropiada, permiten analizar los problemas y pensar de manera más flexible (NCTM, 2003); ayudan a comprender conceptos matemáticos y colaboran en el proceso de resolución (Goldin, 2002). Según Diezmann y English (2001), una representación gráfica visual que muestra la información de forma concreta y espacial ayuda a percibir la estructura de un problema y a sentar las bases para su resolución.

En este escrito se muestra una propuesta para introducir las ecuaciones e inecuaciones en educación primaria a través de problemas aritméticos con apoyo visual. Esto último, en consideración de todos los beneficios que este tipo de problemas aporta en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, buscamos proporcionar información útil para que los docentes puedan comprender y apoyar el pensamiento algebraico de sus estudiantes, a través de tareas que permitan representar y percibir ideas algebraicas, razonar sobre la generalidad y analizar las relaciones entre las cantidades. Sobre esto último, Kieran (2022) señala que son escasas, y por tanto necesarias, las investigaciones sobre el pensamiento algebraico de tipo estructural relacionado con la transformación de expresiones y la resolución de ecuaciones algebraicas. Lo que en este trabajo extendemos a las inecuaciones.

Nuestro objetivo es identificar las estructuras que estudiantes de 8 a 10 años evidencian en problemas con apoyo visual. Nos preguntamos ¿cuáles son las estructuras algebraicas que perciben al trabajar problemas con apoyo visual? y ¿cómo establecen equivalencias entre las diversas estructuras identificadas?

2. Marco de referencia

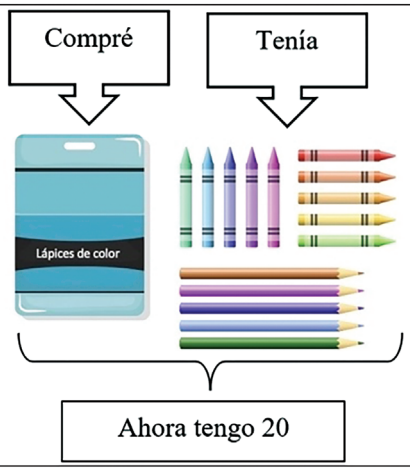
2.1. Pensamiento algebraico

La actividad algebraica se puede llevar a cabo a través de distintos contenidos algebraicos. En este trabajo nos centramos en las *equivalencias, expresiones, ecuaciones* e *inecuaciones.* En estos contenidos se promueve el desarrollo de una comprensión relacional de los signos de igualdad y desigualdad, así como razonar con expresiones o estructuras, establecer la equivalencia entre distintas expresiones en términos generales y plantear y resolver ecuaciones e inecuaciones (Blanton *et al*., 2018).

En la actividad algebraica, al pensar sobre la estructura una persona es capaz de percibir el orden interno de los objetos algebraicos (Rojano, 2022), por ejemplo, el estudiantado reconoce que las expresiones 5 + (3 + 2) y 5 + 5, son equivalentes sin necesidad de realizar el cálculo. Según Kieran y Martínez-Hernández (2022) solo algunas investigaciones, de forma indirecta, han tratado la relación entre pensar sobre expresiones o estructuras y la equivalencia. Estos autores en su trabajo describen cómo estudiantes de primaria (10 a 12 años) resuelven tareas sobre equivalencias numéricas. Entre sus hallazgos notaron que el empleo de las propiedades de la adición, la descomposición y composición de números y las propiedades de la igualdad tuvo un rol importante para transitar desde una perspectiva computacional del signo igual a una relacional.

Independientemente del contenido de la actividad algebraica, el pensamiento algebraico también está conformado por cuatro prácticas básicas: generalizar, representar, justificar y razonar con estructuras y relaciones matemáticas (Blanton *et al*., 2011). Dado que nos interesamos en la expresión con lenguaje algebraico de problemas visuales, en la Figura 1 se muestran ejemplos de representaciones de un problema que involucra una misma ecuación.

Figura 1. Formas de representar un problema aritmético

Compré una caja con lápices de colores. Como en mi casa tenía 15 lápices, ahora tengo 20 en total. ¿Cuántos lápices hay en la caja?		x+ 15 = 20
Lenguaje natural	Representación con apoyo visual	Lenguaje algebraico

Fuente: Pinto *et al.* (2023).

2.2. Planteamiento de ecuaciones e inecuaciones

Una *ecuación lineal* es una expresión matemática, con una o más incógnitas, que implica un signo igual para mostrar que dos expresiones algebraicas o numéricas son equivalentes (Blanton *et al.*, 2011). Mientras que una *inecuación* es una expresión matemática, también con una o más incógnitas, pero que muestra una relación de desigualdad a través de signos de desigualdad (Lloyd *et al.*, 2011). Radford (2022) señaló que el uso de una ecuación para razonar sobre la representación y la comunicación de las relaciones entre cantidades es una piedra angular del álgebra. Las ecuaciones e inecuaciones se trabajan desde los primeros cursos de educación primaria en distintos planes de estudio (p. ej., Chile y España). En el caso del currículo español, el estudio de las ecuaciones comienza desde el primer curso (6 a 7 años), mientras que las inecuaciones desde el tercero (8 a 9 años) (MEFP, 2022).

Tradicionalmente se asocia el planteamiento de ecuaciones e inecuaciones con tareas de traducción que involucran problemas presentados a través del lenguaje natural que se traducen al lenguaje algebraico. Ayala-Altamirano *et al.* (2022) muestran que solicitar al estudiantado de primaria traducir el problema antes de buscar la respuesta, les permite explicar y visualizar su estructura y les ayuda a identificar con claridad cuál es la información desconocida. Entre las dificultades identificadas en el proceso de traducción, Kieran (2007) plantea que una de ellas es visualizar las ventajas del lenguaje algebraico, por este motivo el estudiantado de primaria prefiere usar estrategias y representaciones de tipo aritmético.

En cuanto a las estructuras identificadas en las traducciones del lenguaje natural al lenguaje algebraico, estas suelen ser únicas y condicionadas a la forma como el discurso verbal presenta la información (Coquin-Viennot y Moreau, 2003). Ayala-Altamirano *et al.* (2022) plantean a estudiantes de 9-10 años dos problemas de palabras distintos en los que analizan las traducciones a lenguaje algebraico. En la Figura 1 se muestra un ejemplo: las estructuras representadas por el estudiantado fueron $x + 15 = 20$ o $15 + x = 20$. Los estudiantes reconocieron que las expresiones eran equivalentes debido a la propiedad conmutativa de la adición. Además, afirmaron que, en el caso de usar otras letras para el término desconocido, estas seguirían representando la misma información del problema, por tanto, las expresiones eran equivalentes. Estos autores muestran que los contextos familiares y la menor complejidad lingüística ayudaron a visualizar la relación entre cada una de las unidades significativas expresadas tanto en lenguaje natural como en lenguaje simbólico. Animarlos a pensar si las expresiones "contaban la historia" les ayudó a discutir la pertinencia de utilizar determinados símbolos en sus ecuaciones. Estos hallazgos complementan los descritos por Radford (2022), quien plantea que los problemas con contextos alientan a los estudiantes a dar sentido a las cantidades desconocidas, evitando introducirlas de forma aislada representadas solo por letras.

2.3. Problemas con apoyo visual y el pensamiento algebraico

En el contexto de la enseñanza del álgebra, se ha establecido como clave para desarrollar el pensamiento algebraico del estudiantado, el visualizar e identificar estructuras para así abstraer y generalizar (Hunter y Miller,

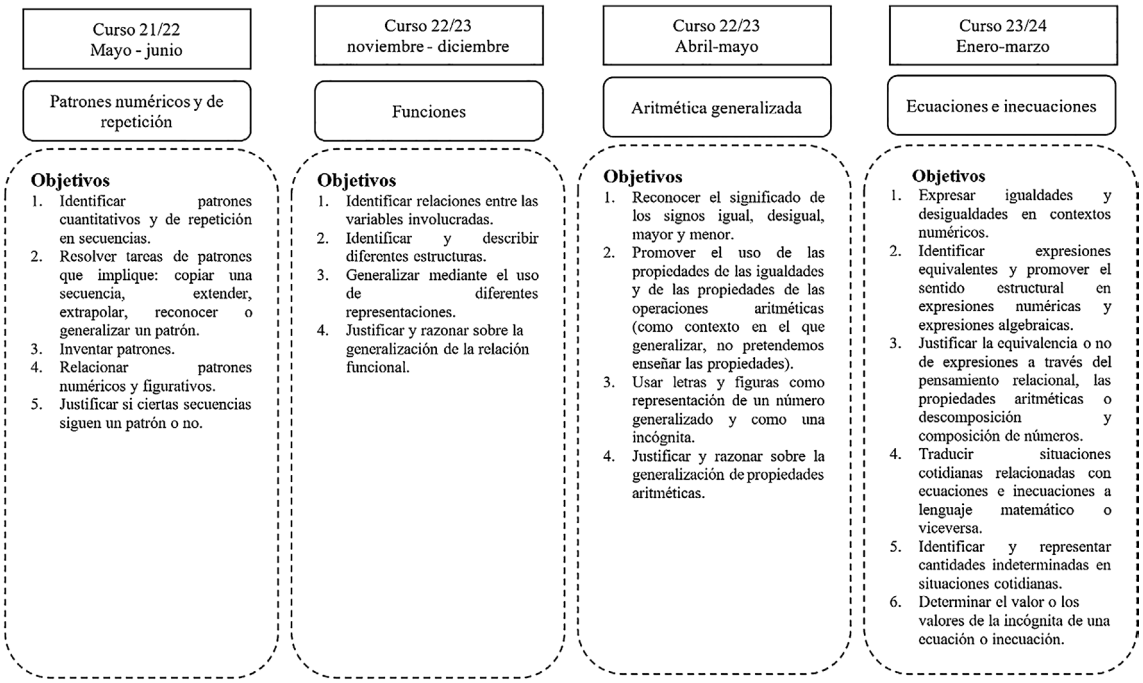
2022). Investigaciones como la de Radford (2011) dan cuenta del aporte de las representaciones visuales de patrones de crecimiento para ayudar a los estudiantes a notar relaciones. Sin embargo, hay pocas investigaciones, con estudiantes de primaria, donde se trate la resolución de problemas con apoyo visual de ecuaciones e inecuaciones. Al respecto Radford (2022) presenta una propuesta en la que se presentan historias matemáticas para resolver ecuaciones a través de representaciones visuales de sobres y cartas. En este trabajo realizado con estudiantes de tercero de primaria es posible ver que este tipo de representaciones fue una oportunidad para tratar el álgebra centrándose en las acciones necesarias para realizar el despeje de la incógnita más que en el uso del lenguaje simbólico algebraico. Kieran (2022) señala que son necesarios más trabajos sobre los retos que enfrentan los estudiantes cuando estudian las ecuaciones y pasan de representaciones que no emplean letras al uso de estas. El trabajo que aquí se presenta busca contribuir a esta línea de investigación abierta.

La importancia de la visualización en álgebra no es algo solo reservado para la educación primaria. Marghetis *et al*. (2016) realizan un estudio con voluntarios mayores de edad (20 años promedio) y concluyen que el procesamiento visual es una ventaja, más que un obstáculo, para el razonamiento matemático abstracto. Esto lo evidenciaron cuando los voluntarios resolvieron diversas tareas en las que estaban involucradas ecuaciones algebraicas. Por tanto, creemos que nuestra investigación puede ser un aporte a largo plazo. La incorporación de problemas visuales en la enseñanza de ecuaciones e inecuaciones no solo facilita el aprendizaje del lenguaje algebraico, sino que también ayuda al estudiantado a desarrollar un pensamiento algebraico profundo.

3. Metodología

El presente documento muestra el análisis retrospectivo de parte de los datos recogidos durante el cuarto y último ciclo de un experimento de enseñanza desarrollado en el seno del proyecto más amplio centrado en el estudio del desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria[1]. En la Figura 2 se muestran los objetivos de las intervenciones y las temáticas tratadas en cada ciclo. El experimento de enseñanza en el aula (Cobb y Gravemeijer, 2008) tuvo un carácter cualitativo, exploratorio y descriptivo, y su objetivo fue promover el pensamiento algebraico en educación primaria. En cada ciclo, para cada temática se implementaron cuatro o cinco sesiones de clase de una hora de duración aproximadamente.

Figura 2. Resumen del estudio longitudinal



Fuente: Elaboración propia.

[1] Para más información consultar la web www.pensamientoalgebraico.es

En particular, en este trabajo analizamos los datos recogidos en dos aulas de 3.º y 4.º de primaria, durante el curso académico 23/24, cuando se trató el tema de las ecuaciones e inecuaciones. Acotamos nuestro estudio y nos centramos en mostrar parte de los resultados relacionados con los objetivos 2, 3, 4 y 5 del cuarto ciclo (Figura 2). En este artículo buscamos identificar las estructuras que estudiantes de 8 a 10 años evidencian en dos problemas con apoyo visual.

4. Participantes

En este trabajo analizamos las respuestas de 51 estudiantes de educación primaria[2], de los cuales veintisiete son de 3.° (8-9 años) y veinticuatro de 4.° (9-10 años) de un colegio público de España. Recogimos la información bajo la aprobación de un informe del Comité de Ética de Investigación en Seres Humanos de la Universidad de Granada.

Con respecto a los conocimientos previos del estudiantado, cabe destacar la experiencia obtenida en el tercer ciclo del experimento de enseñanza (curso 22/23) sobre aritmética generalizada. El estudiantado realizó tareas que involucraban el uso de los símbolos de igualdad y desigualdad (=, ≠, > y <). También generalizaron y discutieron sobre algunas propiedades de la suma y de la multiplicación. La letra se introdujo desde el primer ciclo del estudio longitudinal para expresar el caso general y cantidades desconocidas, no obstante, el estudiantado podía representar estas cantidades del modo que quisieran. Además, durante todo el estudio longitudinal se promovieron las cuatro prácticas algebraicas mencionadas en nuestro marco teórico: generalizar, representar, justificar y razonar con estructuras y relaciones matemáticas.

5. Diseño de las sesiones

Durante el experimento de enseñanza se mantuvo la disposición normal del aula, los estudiantes estaban sentados en parejas o tríos. Una investigadora desempeñó el papel de investigadora-docente (ID). Su rol principal fue motivar al estudiantado a participar activamente e interactuar entre ellos y aclarar sus dudas sobre las tareas. Otros miembros del equipo investigador actuaron como observadoras y grabaron en vídeo las sesiones. Los docentes habituales cumplieron un rol observador.

Diseñamos cuatro sesiones de 60 minutos cada una, implementadas en ambos cursos de igual modo. Cada una de las sesiones incluía distintas fases: introducción general de la tarea por parte de la ID; resolución de las tareas propuestas de forma individual o en pequeños grupos con fichas de trabajo, y debate general en el que el estudiantado podía compartir sus ideas con el resto de la clase, pedir a sus compañeros que explicaran su pensamiento o hacer sugerencias para revisar las respuestas o generalizaciones propuestas. El orden de las fases no era lineal. Esto último permitía al estudiantado retroceder y revisar sus estrategias, favoreciendo su autonomía en la toma de decisiones al resolver tareas matemáticas. La ID no dio al estudiantado ninguna explicación introductoria sobre las ecuaciones o inecuaciones.

En las primeras sesiones se realizó un diagnóstico en el que se presentaron tareas que tenían como propósito expresar igualdades y desigualdades en contextos numéricos (Figura 3).

Luego, para introducir las ecuaciones e inecuaciones se presentó primero un problema con apoyo visual cuya estructura era $x + 12 = 22$. Como se observa en la Figura 4, la cantidad desconocida estaba representada por un cofre cerrado y los tesoros eran monedas o diamantes que estaban dispuestos en grupos o de forma individual. Se buscaba que el apoyo visual permitiera expresar la cantidad de tesoros de múltiples formas, por ejemplo, los tesoros que encontró pueden ser expresados como 12 (total) o como 9 + 3 o 3 x 3 + 3 (si se descomponen en monedas y diamantes). El segundo problema involucraba la inecuación $14 + x < 26$. Siguiendo la misma lógica anterior, como se observa en la Figura 5, la cantidad de botellas se podía expresar de múltiples formas dado que en la disposición visual se consideraron distintas agrupaciones y dos tipos de botellas diferentes (grandes y pequeñas). La cantidad desconocida se representó con una caja.

En la última sesión el foco estuvo centrado en estrategias informales para resolver ecuaciones e inecuaciones, sin embargo, estas tareas no serán analizadas en este trabajo.

[2] Para asegurar el anonimato del estudiantado, empleamos el código E_i para cada estudiante, donde i = 1 hasta llegar al número total de estudiantes de cada curso

Figura 3. Ejemplo de tareas de diagnóstico

Objetivo de las tareas	Ejemplo de tarea
Expresar igualdades y desigualdades en contextos numéricos. Justificar la equivalencia o no de expresiones.	**¡Dime el número 8 sin decir solo 8!** 7 + 1 4 + 4 2 x 4 6 x 2 5 + 1 + 2 ¿Son correctas las respuestas? 1 + 7 6 + 2 2 + 4 5 + 3 2 + 4 + 1 Sofía Miguel
Traducir situaciones cotidianas a lenguaje matemático y resolverlas.	**Desafío 2** En un ascensor suben 8 personas en la planta baja. Luego en la segunda planta suben algunas más. En total pueden subir menos de 12 personas al ascensor. a) Colorea la expresión que representa la situación 12 < 8 + y 8 + y < 12 8 + y = 12 b) Explica cuántas personas podrían subir en la segunda planta.

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4. Hoja de trabajo búsqueda del tesoro

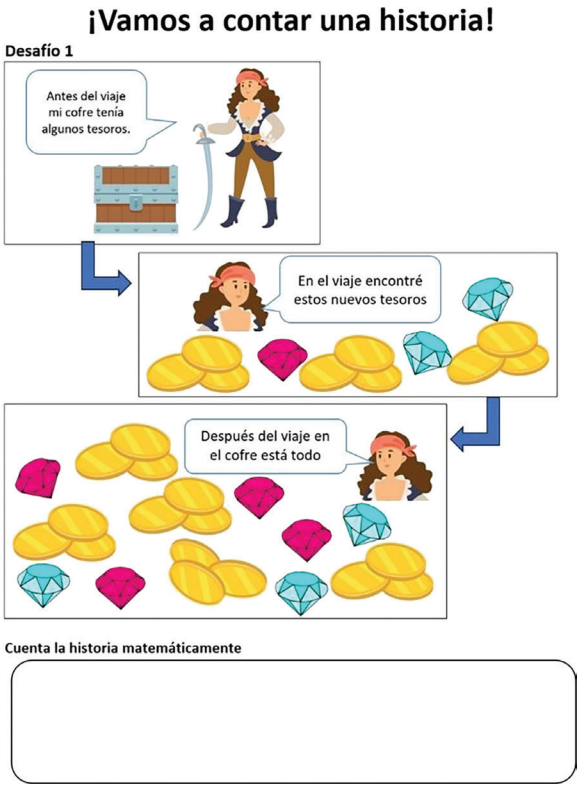
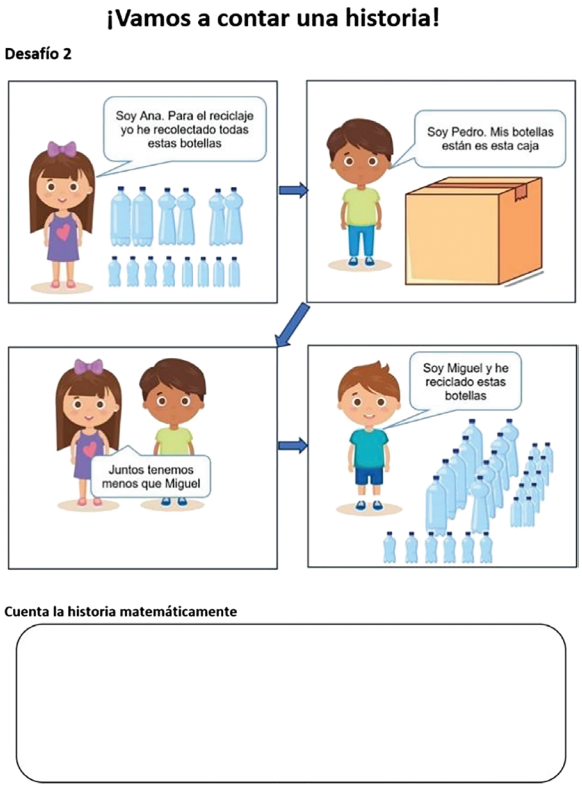


Figura 5. Hoja de trabajo reciclaje de botellas



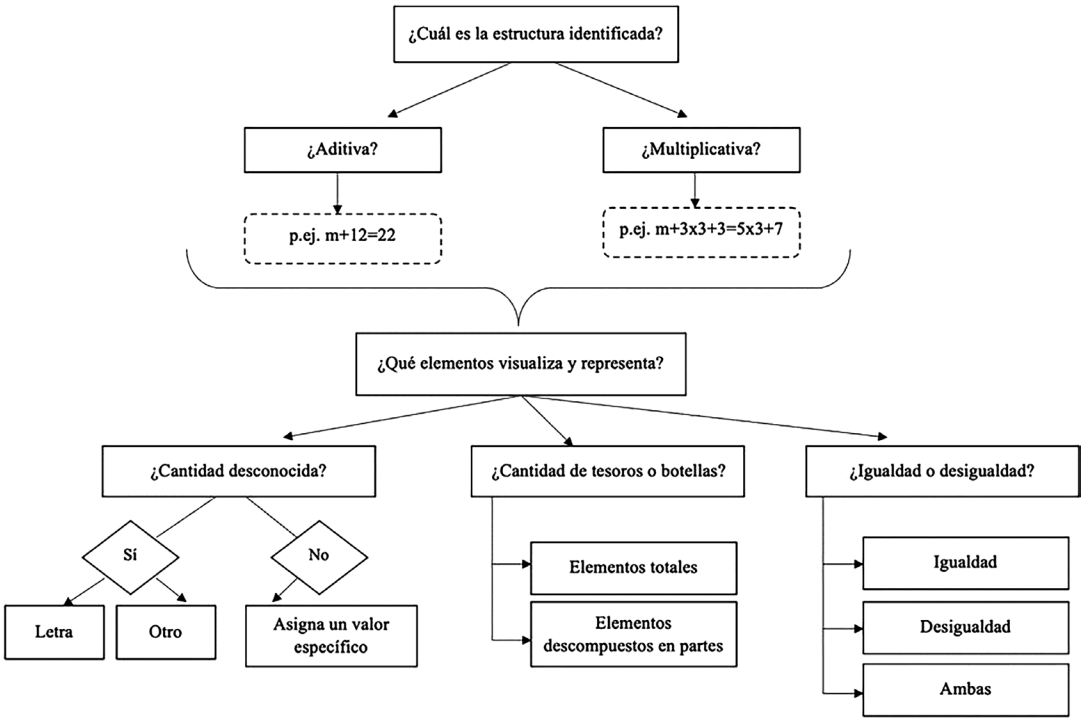
Fuente: Imágenes obtenidas de www.freepik.es, hojas de trabajo elaboradas por el equipo de investigación.

6. Análisis de los datos

Las fuentes de información de este estudio fueron las hojas de trabajo que completaron los estudiantes, las videograbaciones y las transcripciones de las sesiones. Nuestra unidad de análisis fueron las producciones escritas en las sesiones y las intervenciones orales realizadas en las puestas en común, las cuales fueron contrastadas en el análisis.

Las categorías usadas en este estudio emergen de un análisis inductivo de los datos. En primer lugar, identificamos las estructuras para diferenciar las correctas de las incorrectas. Consideramos una estructura correcta cuando presenta todos los elementos de la historia (valores conocidos y desconocidos y relación de igualdad y/o desigualdad) independientemente del orden en que expresen la historia. Además, consideramos como parcialmente correctas aquellas estructuras en las que el estudiante realizó un conteo de alguno de los elementos de modo incorrecto, otorgó un único valor a la cantidad indeterminada o evidenció una restricción no especificada en la historia. En la Figura 6 se muestra cómo se analizaron las respuestas seleccionadas y qué elementos se tuvieron en cuenta para poder caracterizar las estructuras identificadas al plantear los problemas con apoyo visual. Identificamos las distintas estructuras y las clasificamos en estructuras aditivas o multiplicativas. Realizada esta clasificación, para cada estructura atendimos a los elementos visualizados o representados. Nos preguntamos: ¿cómo representa la cantidad desconocida?, ¿cómo representa la cantidad de tesoros o botellas? y ¿qué tipo de relación expresa: igualdad o desigualdad?

Figura 6. Flujo análisis respuestas



Fuente: Elaboración propia.

Las dos primeras autoras de este estudio clasificaron las respuestas a las dos tareas de los estudiantes. En primer lugar, se analizaron las respuestas por escrito, las cuales posteriormente se completaron con hitos destacables de la puesta en común de los estudiantes. Cuando hubo discrepancias, las cuales surgieron en un momento inicial para diferenciar entre estructuras correctas e incorrectas, se discutieron hasta llegar a un acuerdo con la tercera autora del documento. Estas discrepancias se solucionaron consensuando lo que era una estructura correcta entre todas las autoras del documento.

7. Resultados

7.1. Planteamiento de ecuaciones

En la Tabla 1 se muestran 29 respuestas identificadas en las hojas de trabajo. Se observa que el estudiantado en su mayoría representa la cantidad desconocida (cantidad de tesoros en el cofre) con una letra. En contraste hay cuatro estudiantes que recurren a un valor específico (la cantidad de tesoros en el cofre es 10). Si analizamos las estructuras de las ecuaciones para ambos cursos en conjunto, en 28 de estas se expresó la situación a través de una estructura aditiva y solo en un caso a través de una multiplicativa (4.º curso).

Tabla 1. Traducciones del problema de ecuación

Elementos visualizados	**3.º**				**4.º**			
	Estructura aditiva		Estructura multiplicativa		Estructura aditiva		Estructura multiplicativa	
	Expresión	E_i	Expresión	E_i	Expresión	E_i	Expresión	E_i
(a) Cantidad desconocida y todos los tesoros	m+12=22	E_1 E_{20} E_{21}			m+12=22	E_{23}		
	x+12=22	E_8 E_{10} E_{18} E_{27}			p+12=22	E_{12} E_{13} E_{21} E_{17}		
	b+12=22	E_{13}			12+p=22	E_{12} E_{13} E_{20} E_{24}		
	c+12=22	E_{26}			12+h=22	E_4		
	p+12=22	E_{17}						
	k+12=22	E_7						
	12+x=22	E_5						
(b) Cantidad desconocida y los tesoros descompuestos	x+9+3=7+15	E_{19}			p+3+3+3+1+1+1=22	E_{14}	?+3x3+3=3x5+7	E_5
(c) Cantidad específica y todos los tesoros	12+10=22	E_{11}			10+12=22	E_2 E_{15}		
	10+12=22	E_{15}						

Fuente: Elaboración propia.

Con respecto a la visualización de los elementos del problema, en 26 de las respuestas los tesoros que la pirata encuentra en el viaje y los que tiene al final son expresados como un todo, empleando los números 12 y 22, respectivamente. Por el contrario, en tres respuestas se observa que el estudiantado expresa de forma descompuesta una de estas cantidades (descomposición parcial de la expresión) o todas las cantidades, esto en coherencia con el apoyo visual presentado. No se observan diferencias significativas entre las respuestas de 3.º y 4.º. Sobre la equivalencia de las expresiones, por escrito solo dos estudiantes (E_{12} y E_{13}) de 4.º propusieron ecuaciones equivalentes: 12 + p = 22 y p + 12 = 22. En las puestas en común de ambos cursos fue posible discutir más sobre este tema.

En la Figura 7 se muestran las respuestas de la puesta en común de 3.º. Identificamos que E_{13} y E_1 responden correctamente y se refieren a cantidades desconocidas. A su vez reconocen la equivalencia de estas expresiones, ya que, cuando la ID le pregunta a E_1 si su respuesta es igual o distinta a la de E_{13}, este contestó que "son iguales, pero con una letra diferente".

E_{15} en su respuesta asigna el valor a la cantidad desconocida. Cuando E_{15} expone su respuesta, E_8 interviene y dice: "Ella ha adivinado la incógnita", identificando así que lo que ha hecho E_{15} es distinto a las respuestas anteriores.

El estudiantado de 3.º no propuso estructuras multiplicativas, por esto en la puesta en común la ID interviene sugiriendo la expresión p + 3 x 3 + 3 = 22 (Figura 8) y preguntando ¿es correcta esta expresión? Entre las respuestas a esta pregunta cabe destacar el diálogo entre E_8, E_{23} e ID, donde se evidencia que estos estudiantes aceptan esta expresión como válida para representar la historia. Esto se observa cuando los estudiantes señalan y hacen corresponder los diferentes elementos de la expresión dada por ID con los elementos visualizados en las viñetas de la historia. Durante el diálogo, E_8 y E_{23} ofrecen las siguientes expresiones equivalentes: p + 3 x 3 + 3 = 15 + 7 (Figura 7) y p + 3 x 3 + 3 = 15 + 4 + 3 (de modo oral), respectivamente.

Las respuestas discutidas en 4.º se muestran en la Figura 9. A diferencia de la puesta en común de 3.º, aquí sí proponen ecuaciones con estructura multiplicativa.

Figura 7. Estructuras discutidas por el estudiantado de 3.º

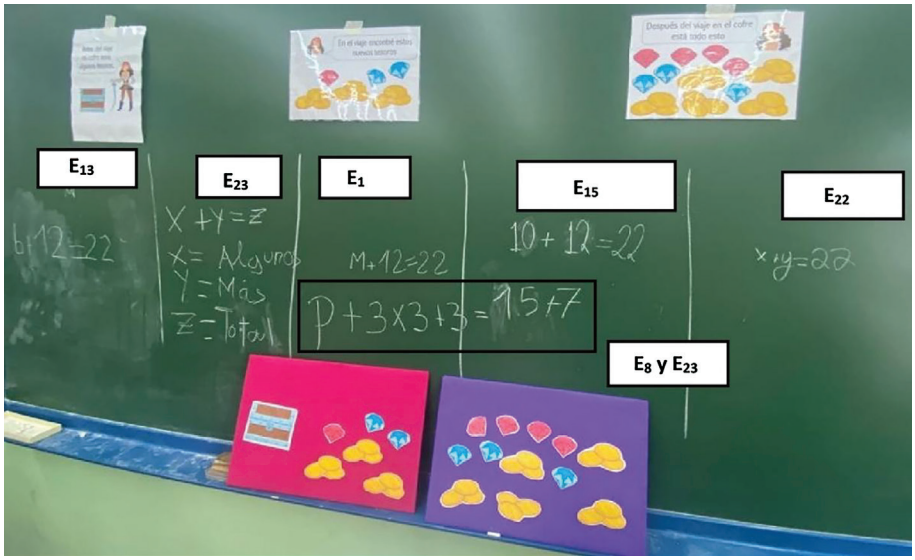


Figura 8. Estructuras propuestas por ID

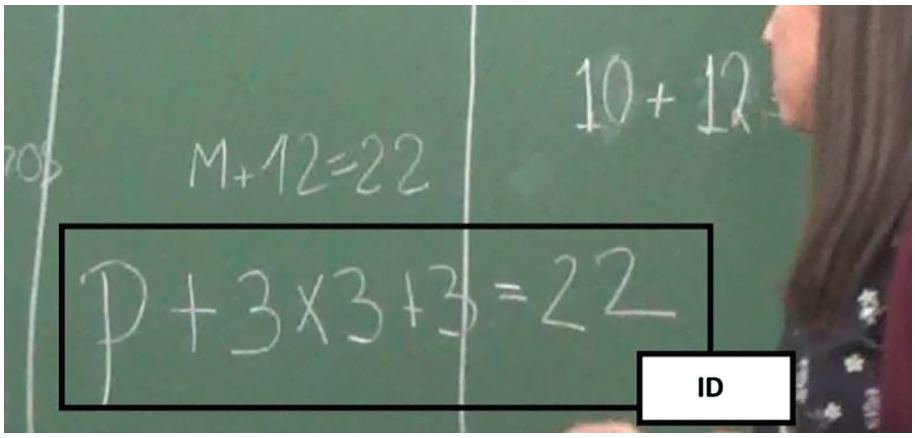
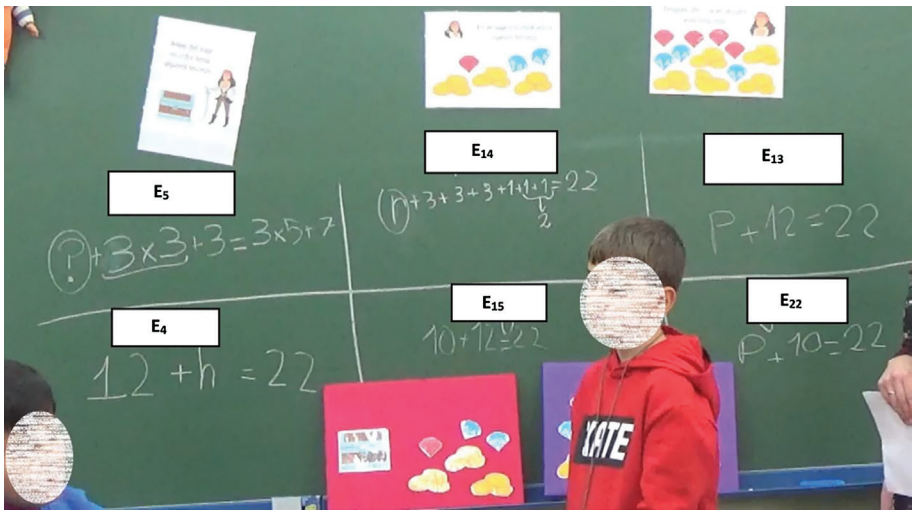
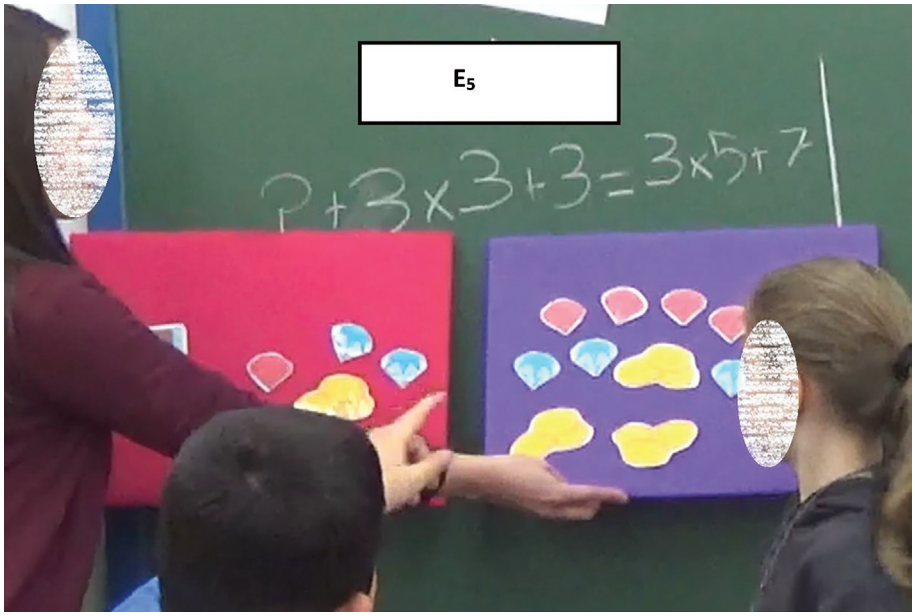


Figura 9. Estructuras discutidas por el estudiantado de 4.º



La discusión comienza razonando si las ecuaciones contaban la historia de las viñetas. E_{12} confirma que la respuesta de E_5 es correcta, para esto se apoya en la imagen del problema y va señalando con su dedo en las viñetas (Figura 10) a la vez que va justificando lo escrito por su compañera. Dice: "Está bien. Porque dice que hay tres grupos de monedas, más los tres diamantes y después es igual a tres por cinco que son las monedas más siete diamantes".

Figura 10. E_{12} explicando la ecuación de E_5



Tras lo anterior, E_{22} interviene opinando que la forma en que E_{14} expresa la historia (p + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 22) es incorrecta puesto que hay dos diamantes azules y uno rosa, y eso no lo evidencia este último de ningún modo. Este estudiante evidencia el reconocimiento de estructuras, no así la equivalencia de estas. E_{22}, observando la imagen, plantea la ecuación p + 3 + 3 + 3 + 1 + 2 = 22 (Figura 11). Justo a continuación, E_9 dice en voz alta que ambas expresiones son correctas, a lo cual E_{22} responde diciendo: "Ya, pero sería más correcto, porque serían dos diamantes azules y un diamante rojo" (refiriéndose a su expresión). E_9 está de acuerdo con la expresión de E_{22} y señala lo siguiente: "Más correcto y más corto".

Figura 11. E_{22} aportando una nueva estructura

ID saca a la pizarra a otros tres estudiantes. En primer lugar, ID pregunta a E_4 por qué considera que su expresión es diferente a la de sus compañeros, a lo que esta responde "Sería doce más h, pero el orden de los factores no altera el producto". Entonces ID le dice que eso es en la multiplicación, que en la suma sería el orden de los sumandos. Por último, E_{15} y E_{22} explican su expresión, y concretamente la expresión de E_{15} (10 + 12 = 22) provoca una intervención interesante por parte de E_9 sobre el reconocimiento de cantidades desconocidas: "Es que eso no explica la historia, porque ahí en el cofre no te muestra cuántas hay".

7.2. Planteamiento de inecuaciones

En la Tabla 2 se muestran 28 respuestas escritas seleccionadas. Observamos que todos, menos dos estudiantes de 4° (E_6 y E_9), representan la cantidad desconocida (cantidad de botellas en la caja) con una letra o un signo de interrogación. Los dos estudiantes anteriores expresan el valor desconocido con palabras y cantidad específica. Si analizamos las estructuras algebraicas de las inecuaciones para ambos cursos en conjunto, en 27 de estas se expresó la situación a través de una estructura aditiva y, al igual que en la tarea de ecuaciones, solo en un caso a través de la estructura multiplicativa (4.º curso).

Tabla 2. Traducciones del problema de inecuación

Elementos visualizados	**3.º**				**4.º**			
	Estructura aditiva		Estructura multiplicativa		Estructura aditiva		Estructura multiplicativa	
	Expresión	E_i	Expresión	E_i	Expresión	E_i	Expresión	E_i
(a) Cantidad desconocida y total de las botellas	14+x<26	E_8 E_{23} E_{26} E_{27}			14+p<26	E_2 E_{13} E_{17} E_{25}		
					14+n<26	E_4		
					14+?<26	E_{10} E_{21} E_{22}		
					14+e<26	E_{11}		
					14+x<26	E_{15}		
					p+14<26	E_{10} E_{13} E_{25}		
					14+h<26	E_{14}		
					26>14+p	E_{13} E_{17} E_{21} E_{25}		
					26>p+14	E_{13} E_{25}		
					14+b<27	E_8		
					14+menos de 12<26	E_9		
(b) Cantidad desconocida y las botellas descompuestas							3x2+8+?<5x2+6+2x5	E_5
(c) Cantidad específica y todas las botellas					14+5<26	E_6		

Fuente: Elaboración propia.

Con respecto a la visualización de los elementos del problema, todos los estudiantes excepto uno presentaron la cantidad de botellas que tiene Ana y la que tiene Miguel como un todo, empleando los números 14 y 26, respectivamente. Encontramos la excepción en 4.°, cuando E_5 descompone los elementos de su expresión.

En cuanto a los estudiantes de 4.°, cabe destacar que cinco de ellos (E_{10}, E_{13}, E_{17}, E_{21} y E_{25}) ofrecen más de una expresión al traducir la historia. Identificamos que algunos de estos estudiantes evidencian la propiedad conmutativa en uno de los miembros de las inecuaciones para cada par de expresiones. Ejemplos de esto son las dos primeras expresiones de E_{13} y E_{25}, quienes emplean exactamente las mismas expresiones: "14 + p < 26" y "p + 14 < 26", si atendemos a sus miembros izquierdos, y sus dos siguientes expresiones: "26 > 14 + p" y "26 > + p + 14" en el caso de los miembros derechos. Respecto a E_{17} y E_{21} destacamos que ambos ofrecen dos expresiones, una siguiendo el orden correcto de la historia y otra el orden inverso. E_{17} ofrece las expresiones: "14 + p < 26" y "26 > 14 + p" y E_{21} las siguientes: "14 + ? < 26" y "26 > 14 + p". En cuanto a los estudiantes E_{10} y E_{21}, cabe mencionar que ambos ofrecen dos expresiones y cambian la representación del dato desconocido de una a otra, mientras que en una utilizan el signo de interrogación (?), en la otra emplean la letra p.

Una diferencia notable es que en 4° se observa una mayor cantidad de respuestas correctas que en 3.º. En este último curso observamos solo cuatro respuestas correctas frente a las veinticuatro de 4.°.

Durante la puesta en común, en 3.° participaron 5 estudiantes. Las expresiones compartidas en esta clase son las que se observan en la Figura 12.

Figura 12. Estructuras presentadas por el estudiantado de 3.°

14+a=F (E_{11})	14+x<26 (E_{26})	14+y=b (E_{12})	Ana tiene 14, Pedro tiene *x*, Miguel tiene 26, Pedro puede tener 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1 (E_{10})	14+x=24<26 (E_5)

En 3.° identificamos únicamente estructuras aditivas entre las respuestas de los estudiantes. En el caso de las inecuaciones, el uso de la relación de desigualdad fue un desafío para el estudiantado, es por esto que en la puesta en común la ID (tras observar las respuestas escritas) pide a cinco estudiantes que han respondido correcta o incorrectamente que compartan sus ideas (Figura 12). Solo E_{26} plantea una expresión correcta, mientras que el resto del estudiantado recurre a la igualdad, a valores específicos y a la igualdad y desigualdad. A pesar de esto, al dialogar sobre sus respuestas aseguran que hay similitudes entre estas. Destacamos a E_{11}, que comienza explicando los elementos de su expresión: "parece que lo que tiene Ana más lo que tiene Miguel, que es a". Luego, ID le pregunta de dónde proviene la F, y E_{11} dice: "Es igual a este (señala F) porque no sabemos cuántos más hay que tener (señala 14 + a)" . Seguido a esto, ID pregunta con la intención de que E_{11} exprese la relación de desigualdad: "¿Cómo representaste menos que Miguel?", a lo cual E_{11} responde: "No sabemos cuánto es", señalando el signo < en la expresión de su compañera E_{26} (Figura 13).

Lo anterior evidencia que E_{11} acepta la relación de desigualdad y de modo oral se corresponde con la expresión de E_{26}. Seguidamente, ID pregunta a toda la clase qué opina de las respuestas de sus compañeras. Interviene E_{27} diciendo que a la expresión de E_{11} le faltan cosas, como poner otra operación, y dice que E_{11} debe indicar que F es menor que 26. Entonces E_{27} sale a la pizarra y complementa la expresión 14 + a = F, escribiendo junto a ella "F < 26" (Figura 14).

Figura 13. E_{11} se apoya en la relación de desigualdad de E_{26}

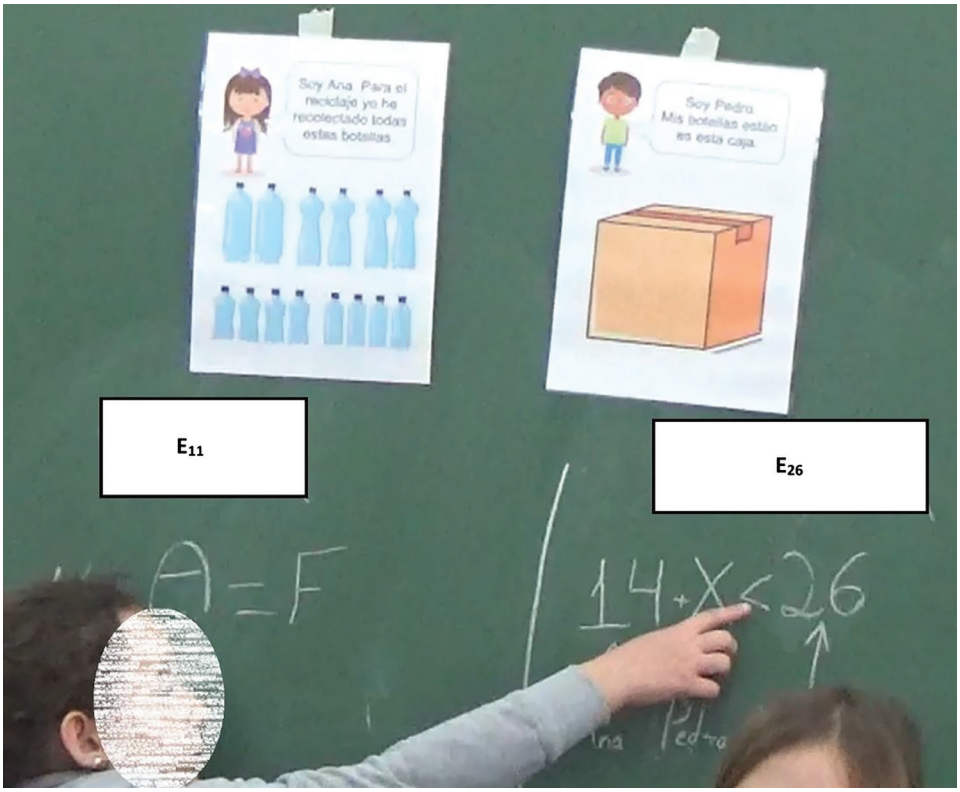
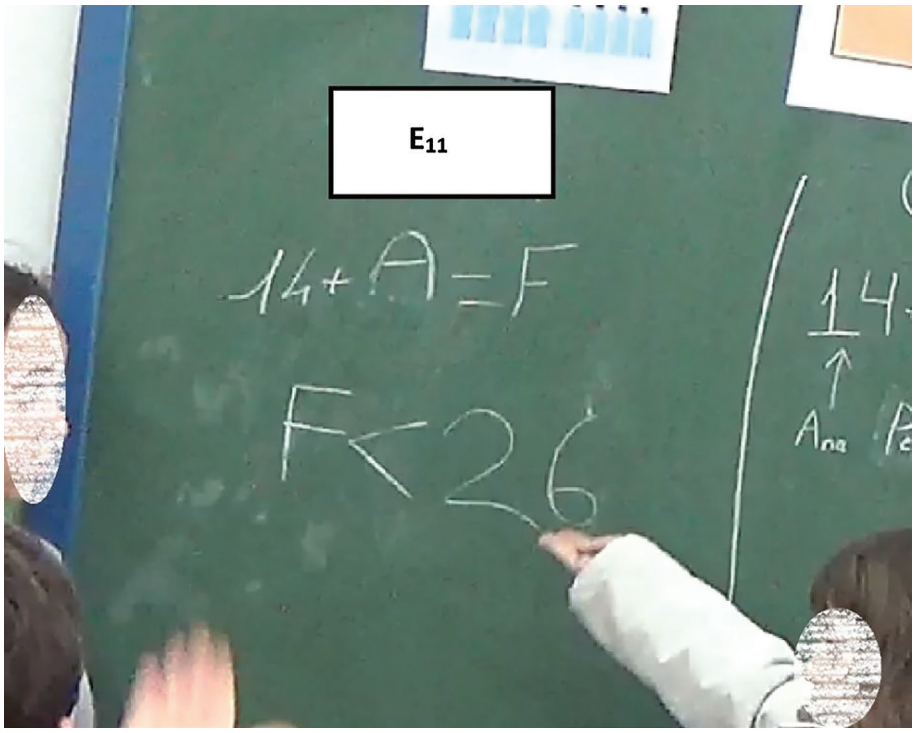
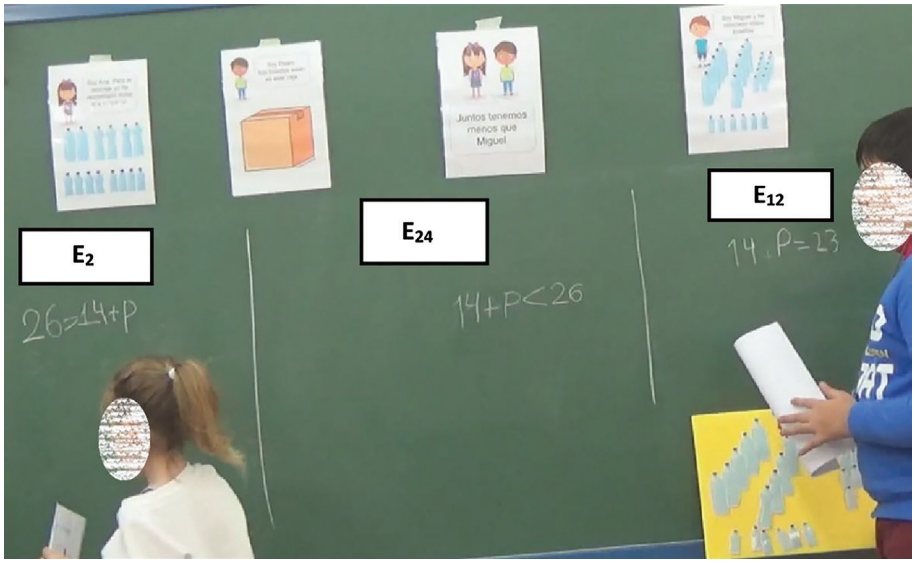


Figura 14. E_{27} complementa la estructura de E_{11}



En 4.° la ID seleccionó a tres estudiantes para la puesta en común, asegurándose que se mostraran diversas estructuras (Figura 15).

Figura 15. Estructuras presentadas por el estudiantado de 4.°



En primer lugar, E_{24} explicó su expresión: "Ana tenía 14 botellas, pues yo miré las que tenía Pedro, pero están en una caja, entonces sumé las 14 que tenía Ana, más la caja que he puesto p". Entonces, ID pregunta por qué ha puesto p, a lo que E_{24} responde: "No sabemos qué número hay". Entonces E_{24} añade que "el signo que esta suma (señala 14 + p) sale un número menor que las botellas de Miguel (señala viñeta 4)". ID solicita entonces explicar cómo sabe esto, a lo que E_{24} responde: "Porque dice que juntos tenemos que tener menos de Miguel (señala viñeta 3)". Finalmente, ID pregunta cómo representó esta última parte, y E_{24} señala el signo menor en su expresión.

Al contrario del estudiante anterior, E_2 inicia expresando "26 de las que tenía Miguel es mayor (señala el signo en su expresión) que las que tenía Ana (señala viñeta 1) más las que tenía Pedro (señala viñeta 2)". Esta estudiante destaca porque en la estructura representada identifica todos los elementos de la historia, aunque en orden contrario. ID pregunta a E_{23} si está de acuerdo con lo que E_2 ha explicado. E_{23} justifica estar de acuerdo del siguiente modo: "Porque el orden no altera al resultado". Lo que evidencia que acepta la equivalencia entre las expresiones.

Por último, E_{12} expresa una igualdad (14 + p = 23), explicando que 14 y p corresponden a las botellas de Ana y Pedro, respectivamente. Sin embargo, cuando ID pregunta a E_{12} por qué dijo que es igual a 23, argumenta lo siguiente: "Buscar un número que sea menor que 26, entre las botellas de Ana y Pedro". En este caso no se plantea la inecuación dado que se busca una posible solución y se expresa como una ecuación.

8. Discusión

El propósito de este escrito es identificar las estructuras que estudiantes de 8 a 10 años evidencian en problemas con apoyo visual. En primer lugar, nos preguntamos ¿cuáles son las estructuras algebraicas que perciben al trabajar problemas con apoyo visual? Observamos que el estudiantado expresa las historias matemáticas principalmente a través de estructuras aditivas en contraste con las multiplicativas. Aunque el apoyo visual muestra agrupaciones que podrían interpretarse como una multiplicación, esto se ignora en primera instancia, al igual que reportan Carraher *et al*. (2006). La percepción de la estructura multiplicativa necesitó de la mediación de la ID.

Observamos que tratar con cantidades desconocidas y representarlas con letras no supuso un problema para el estudiantado. En parte esto puede ser consecuencia de su experiencia en los ciclos previos del estudio longitudinal. No obstante, la tarea en sí misma también estaba diseñada para favorecer el uso y el reconocimiento de cantidades desconocidas, ya que, tal como lo evidencian Ayala-Altamirano *et al*. (2022) y Radford (2022), los contextos cercanos y el motivar a los estudiantes a "contar las historias" los alientan a percibir y tratar con cantidades desconocidas de un modo más accesible que simplemente con expresiones alfanuméricas aisladas.

Otro elemento analizado es cómo el estudiantado representa las cantidades conocidas. Coquin-Viennot y Moreau (2003) señalan que las representaciones únicas de la traducción de un problema son consecuencia del condicionamiento del lenguaje natural. Considerando esto, en el diseño de la tarea buscamos que el apoyo visual permitiera interpretaciones variadas y flexibles. Sin embargo, el estudiantado en su mayoría expresa las cantidades conocidas como un todo (p. ej., 22 tesoros), lo que lleva a que por escrito se obtengan representaciones únicas. La descomposición de los números, también utilizada en el trabajo de Kieran y Martínez-Hernández (2022), se empleó por escrito solo en cuatro casos y se logró percibir como una opción para contar las historias matemáticas cuando la ID validó estas formas de interpretar las imágenes y se discutió en las puestas en común. Estos hallazgos nos guían a reflexionar sobre la importancia del contexto amplio en el que se enmarca la tarea, el cual incluye elementos como la configuración social del aula, los discursos que se fomentan, las normas de participación, los medios materiales, entre otros (Kieran, 2019).

El último elemento analizado en las estructuras es cómo las relaciones de igualdad y desigualdad se representan. Notamos que la relación de desigualdad supone un mayor desafío. Solo cuatro estudiantes de 3.º de primaria responden correctamente y el estudiantado de 4.º, aunque ofrece mayor número de respuestas correctas, en algunos casos recurre a la ecuación para expresar la inecuación, tal como lo indican Tsamir y Almog (2001).

Cabe mencionar que, aunque los resultados reportan una dificultad para expresar matemáticamente las inecuaciones, el estudiantado sí logra demostrar que comprende parte de su significado. Paoletti *et al*. (2021) plantean que las inecuaciones pueden tener un significado comparativo o restrictivo. En las discusiones pareciera ser que el estudiantado evidencia el primero, dado que demuestran entender que Miguel debe tener menos botellas que Ana y Pedro, solo que dudan en cómo expresar eso. El estudiantado tiende a buscar solo una posible solución para establecer la comparación por escrito. Esto se podría explicar porque las relaciones de desigualdad se suelen emplear en educación primaria principalmente para comparar dos o más cantidades y no se trata el significado de la desigualdad en contextos que involucran cantidades desconocidas. El significado restrictivo implica buscar todas las posibles soluciones que hacen verdadera la inecuación, pero su dificultad radica en que la expresión matemática suele dejar implícitas todas esas posibles soluciones. Esto último podría ser un factor para considerar en la introducción de las inecuaciones en educación primaria. Es necesario contrastar la idea habitual de que los problemas tienen una única solución numérica (ecuaciones) con la idea de que es posible que tengan múltiples soluciones (inecuaciones) y que estas soluciones se pueden comunicar matemáticamente sin tener que escribir todos los números que forman el conjunto de soluciones.

La segunda pregunta de investigación que nos planteamos es ¿cómo se establecen equivalencias entre las diversas estructuras identificadas? Como se mencionó antes, por escrito la mayoría de los estudiantes ofrecen una estructura única. En nuestro estudio, la reflexión sobre la equivalencia se promovió principalmente en las discusiones grupales. En la gestión de la puesta en común la ID se aseguró de que se expusieran distintas estructuras, tanto correctas como incorrectas. El apoyo visual jugó un papel esencial, concretamente, la posibilidad ofrecida a los estudiantes de visualizar la historia y hacer corresponder los elementos de sus viñetas con los elementos de las estructuras favoreció la aceptación de distintos modos de expresar e identificar la equivalencia. Nuestros resultados indican que, al momento de representar los problemas de ecuaciones e inecuaciones con expresiones equivalentes, los elementos visuales son un recurso importante para aceptar estas equivalencias, permitiendo al estudiantado mirar el problema y tener un argumento fiable y simple para dialogar sobre la posibilidad de expresar de múltiples formas una misma situación. Radford (2022) y Marghetis *et al*. (2016) ya destacaban el rol de la visualización en el contexto de las ecuaciones, lo que ampliamos a las inecuaciones.

Siguiendo las ideas de Kieran y Martínez-Hernández (2022), el diálogo se podría complementar con el empleo de las propiedades de las operaciones y la igualdad y la descomposición y la composición de números, lo que en nuestros resultados también se emplea como argumento, pero en menor medida o de forma implícita. El fomento del uso de las propiedades y la descomposición y la composición de números se puede realizar de forma intencional a través de la intervención continua del docente. En nuestro estudio, la actuación de la ID favoreció la exploración de diversas estructuras matemáticas y la identificación de equivalencias entre ellas. A través de preguntas generales como "¿qué opinas de la respuesta de sus compañeras?" o preguntas específicas como "¿de dónde proviene esa letra?" o "¿cómo representaste *menos que*...?", se promovió un entorno de reflexión y discusión que permitió a los estudiantes justificar sus representaciones y construir nuevas conexiones. Este enfoque activo y dialógico facilitó no solo la generación de múltiples estructuras, sino también el reconocimiento de relaciones entre estas, avanzando hacia una comprensión del concepto de equivalencia matemática. Este acompañamiento docente colaboró en la guía del aprendizaje, contribuyendo directamente a la consecución del objetivo del estudio, guiando las ideas iniciales de los estudiantes hacia un pensamiento algebraico (Blanton, & Kaput, 2003), al dar respuesta concretamente a la pregunta de investigación relacionada con el establecimiento de equivalencias entre las diversas estructuras.

9. Conclusiones

Concluimos que la introducción de tareas sobre ecuaciones e inecuaciones con apoyo visual mediante historias matemáticas y el apoyo docente facilita que el estudiantado identifique estructuras equivalentes para una misma tarea. Basándonos en investigaciones previas, nuestra conjetura fue que los problemas al ser representados visualmente como unas historias a través de viñetas permitirían analizar los problemas y pensar de manera más flexible (NCTM, 2003); ayudarían a comprender conceptos matemáticos y colaborarían en el proceso de resolución (Goldin, 2002); y permitirían percibir la estructura de los problemas (Diezmann, & English, 2001). Al respecto, nuestros resultados fueron positivos, ya que el estudiantado logró captar diversas estructuras y establecer la equivalencia entre estas. A su vez, trataron con cantidades desconocidas y las expresaron de modo algebraico. Esto último ratifica la importancia de proponer representaciones apropiadas en contextos cercanos para el estudiantado de modo que se puedan centrar, en nuestro caso, en la equivalencia de las expresiones. Kieran (2022) señala que son escasas, y por tanto necesarias, las investigaciones sobre el pensamiento estructural relacionado con la transformación de expresiones y la resolución de ecuaciones algebraicas. Nuestro trabajo extiende el estudio anterior al contenido de las inecuaciones.

Una línea de investigación que complementaría nuestro estudio sería desarrollar una propuesta en la que se fomente más que el estudiantado justifique las equivalencias utilizando de manera explícita propiedades aritméticas, como asociativa, distributiva y conmutativa, así como estrategias de composición y descomposición de cantidades conocidas. Si bien en nuestro trabajo hay argumentos que hacen alusión a la propiedad conmutativa, esto se podría mejorar en futuras intervenciones. También se podrían presentar más tareas que permitan a los estudiantes familiarizarse con las inecuaciones y distinguirlas de las ecuaciones, debido a la baja cantidad de respuestas a la tarea de inecuación entre nuestros resultados.

10. Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo del Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 (www.pensamientoalgebraico.es), ayuda PRE2021-097391, España y ANID 72220116, Chile.

11. Referencias

Ayala-Altamirano, C., Pinto, E., Molina, M., & Cañadas, M. C. (2022). Interacting with Indeterminate Quantities through Arithmetic Word Problems: Tasks to Promote Algebraic Thinking at Elementary School. *Mathematics*, *10*(13), 2229. https://doi.org/10.3390/math10132229

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 27-49). Springer.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears. *Teaching Children Mathematics*, *10*(2), 70-77. https://doi.org/10.5951/TCM.10.2.0070

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, *37*(2), 87-115.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.

Coquin-Viennot, D. , & Moreau, S. (2003). Highlighting the role of the episodic situation model in the solving of arithmetical problems. *European Journal of Psychology of Education*, *18*(3), 267-279. https://doi.org/10.1007/BF03173248

Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. En A. A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook* (pp. 77-98). NCTM.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, (pp. 196-218). Lawrence Erlbaum Associates.

Hunter, J., & Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: Supporting young diverse students to identify structures and generalise. *ZDM - Mathematics Education*, *54*(6), 1349-1362. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 707-762). Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. En J. Cai y E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 579-593). Springer.

Kieran, C. (2019). Task Design Frameworks in Mathematics Education Research: An Example of a Domain-Specific Frame for Algebra Learning with Technological Tools. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 265-287). Springer.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM - Mathematics Education*, *54*(6), 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kieran, C., & Martínez-Hernández, C. (2022). Structure sense at early ages: The case of equivalence of numerical expressions and equalities. En T. Rojano (Ed.), *Algebra structure sense development amongst diverse learners* (pp. 35-66). Routledge.

Lloyd, G. M., Herbel-Eisenmann, B. A., & Star, J. R. (2011). *Developing essential understanding of expressions, equations, and functions for teaching mathematics in grades 6-8*. NCTM.

Marghetis, T., Landy, D., & Goldstone, R. L. (2016). Mastering algebra retrains the visual system to perceive hierarchical structure in equations. *Cognitive Research: Principles and Implications*, *1*(1), 25. https://doi.org/10.1186/s41235-016-0020-9

Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases Curriculares Educación Básica*. Unidad de Currículo y Evaluación.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 157/2022, de 01 de marzo, por el que se establecen la ordenación y enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE*, *52*, 24386-24504.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales.

Paoletti, T., Stevens, I., & Vishnubhotla, M. (2021). Comparative and restrictive inequalities. *The Journal of Mathematical Behavior*, *63*, 100895. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100895

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M., & Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(1), 149-173. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Springer.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Springer.

Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM Mathematics Education*, *54*(6), 1151-1167. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x

Rojano, T. (2022). Algebra structure sense: Conceptual approaches and elements for its development. En T. Rojano (Ed.), *Algebra structure sense development amongst diverse learners* (pp. 1-19). Routledge.

Tsamir, P., & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(4), 513-524. https://doi.org/10.1080/00207390110038277