

ELABORACIÓN DE FUNCIONES. OBJETIVO Y RESTRICCIONES PARA LA OPTIMIZACIÓN DE EXPLOTACIONES DE AGUA SUBTERRÁNEA EN RÉGIMEN PERMANENTE MEDIANTE TÉCNICAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL.

M. F. ANDRÉS SÁNCHEZ (*)

ANDRÉS SÁNCHEZ, M. F. (1996): Elaboración de funciones. Objetivo y restricciones para la optimización de explotaciones de agua subterránea en régimen permanente mediante técnicas de programación lineal. [**Elaboration of objective functions and constraints for the optimization of groundwater steady flow exploitation through linear programming techniques.**]. *Stvd.Geol.Salmant.*, **32**: p. 23-38. Salamanca, 1997-02-28.

(FECHA DE RECEPCIÓN: 1996-06-25) (FECHA DE ADMISIÓN: 1996-07-29)

Key words: Agua subterránea, Gestión, Optimización, Programación lineal, Función objetivo.

Palabras clave: Groundwater, Management, Optimization, Linear programming, Objective functions, Constraints.

(*): Departamento de Geología, Facultad de Ciencias, 37.008 Salamanca.

RESUMEN: La optimización de explotaciones de agua subterránea tratada con los métodos de programación lineal, precisa evaluar conjuntamente los datos de bombeos y de variación de potenciales para sacar conclusiones de los valores de unos con respecto a los otros, por lo que se requiere que aparezcan como variables en la función objetivo. Es por ello que los sencillos planteamientos de maximización o minimización de potenciales hidráulicos o extracciones han de transformarse en funciones aptas para ser tratadas con las técnicas de programación lineal. El presente trabajo tiene como finalidad mostrar la elaboración de algunas de estas funciones objetivo, de las restricciones provenientes de la ecuación de flujo tratada mediante diferencias finitas, de las relacionadas con las condiciones de contorno y de las demás auxiliares, para la optimización de explotaciones de agua subterránea, utilizando para ello varios ejemplos desarrollados sobre tipologías hidrogeológicas genéricas.

Los problemas de optimización que se contemplan son de dos tipos: Mantenimiento de la suma de los potenciales hidráulicos en su máximo posible o, lo que es lo mismo, de los descensos en su mínimo posible, para unas extracciones dadas del acuífero y obtención de las máximas extracciones para unos descensos limitados. En ambos casos el resultado es la asignación de los puntos de bombeo y los volúmenes de extracción de cada pozo con estos requisitos.

Los distintos casos se han tratado para acuífero libre o confinado, flujo unidimensional en régimen permanente y para diferentes condiciones de contorno, discretizando el acuífero tipo en celdas y tratando la ecuación del flujo mediante diferencias finitas con el criterio de bloque centrado.

ABSTRACT: The optimization of exploitations of groundwater treated with linear programming methods requires joint evaluation of the data on pumping and variation of potentials, in order to draw conclusions on the values of the one with respect to the other, hence it is necessary that they appear as variables in the objective function. For this reason the simple approaches of maximization or minimization of hydraulics potentials or extractions must be transformed into functions suitable for treatment by linear programming. The object of this paper is to demonstrate the elaboration of some of these objective functions, as well as of the restrictions arising from the flow equation treated by finite differences, and of those related to the surrounding conditions and other auxiliary restrictions, for the optimization of exploitations of groundwater, using diverse examples developed on generic hydrogeological typologies.

The problems of optimizations contemplated are of two types: the maintaining of the sum of the hydraulics potentials at the maximum possible or, what amounts to the same thing, the maintaining of the decreases at the minimum possible, for given extractions from the aquifer and the obtaining of maximum extractions for limited decreases. In both cases the result is the assignement of the pumping points and extraction volumes of each well whit these requirements.

The different cases have been dealt whit for a water table aquifer or a confined aquifer, steady state unidimensional flow and for different environmental conditions, by discretization of the aquifer type in cells and treating of the flow equation by finite differences whit centered block criterion.

INTRODUCCIÓN

La explotación del agua subterránea se viene realizando en la mayor parte del territorio de una manera descontrolada, produciendo efectos negativos sobre el medio hídrico, el medio ambiente y la economía.

La herramienta más utilizada en los últimos años para la gestión del agua tanto en cantidad como en calidad, la constituyen los modelos matemáticos de flujo y de transporte de solutos respectivamente.

Con los primeros se puede prever, para la zona que se desee, la evolución de los niveles piezométricos en el tiempo, evolución inducida por un patrón de explotación del acuífero. Esta previsión permite valorar los efectos que conllevaría ese tipo de explotación y, por ello, elegir entre distintas alternativas.

Con los modelos de transporte se pueden prever los efectos de un vertido, puntual o areal, sobre la calidad del agua del acuífero, para un patrón dado de explotación, con lo cual se puede manipular y controlar la contaminación con el fin de eliminarla o minimizar su influencia.

De uso mas restringido, existen también otro tipo de modelos, llamados modelos de gestión, que conjugan modelos de simulación (flujo y transporte) con métodos de optimización, y de una forma directa dan el patrón más adecuado de explotación de un acuífero, para obtener, a lo largo del período de tiempo que se desee, la evolución mas conveniente de los niveles piezométricos o el abastecimiento de una demanda de agua con el menor coste económico o ambiental.

Los modelos de gestión también han sido utilizados en acuíferos desde los que ha de abastecerse una demanda y que presentan problemas de contaminación. En este caso los modelos ofrecen los patrones de explotación que conllevan los menores efectos indeseados.

Los tipos de modelos de gestión de aguas subterráneas han sido descritos por BACHMAT *et al.* (1980) y GORELICK (1983).

Los métodos de optimización más corrientes en Hidrología subterránea son la programación lineal, la programación no lineal y la programación dinámica, siendo el primero el más utilizado.

El objetivo de la programación lineal es calcular el valor de las variables de una función que maximizan o minimizan esta. Para ello se parte de un conjunto de ecuaciones o inecuaciones, (restricciones), que limitan los valores que puede tener cada variable. Tanto la función como las restricciones son expresiones lineales. La función se llama función objetivo, y las variables, variables de decisión. El método “simplex” desarrolla un procedimiento iterativo y es el de más amplia utilización.

Hay dos tipos básicos de planes de gestión (HEIDARI, 1982), según que la función objetivo se refiera a medidas económicas o a la capacidad física del sistema

acuífero. En este último ámbito, las funciones objetivo más utilizadas son: maximización o minimización de potenciales o de descensos, de extracciones, de gradientes hidráulicos o de velocidades de flujo, de concentraciones químicas, etc., teniendo como variables de decisión estos mismos factores.

De entre los distintos métodos desarrollados históricamente para la construcción de los modelos, uno de los más utilizados ha sido el del “embedding”, (GORELICK, 1983), consistente en incluir como restricciones en la programación lineal las propias ecuaciones del flujo del agua del acuífero. Estas ecuaciones son las resultantes de discretizar el área objeto del problema en celdas y aproximar mediante diferencias finitas o elementos finitos la solución de la ecuación diferencial del flujo. Esta técnica fué presentada por primera vez por AGUADO & REMSON (1974).

La optimización de explotaciones de agua subterránea tratada con los métodos de programación lineal, precisan evaluar conjuntamente los datos de bombeos y de variación de potenciales para sacar conclusiones de los valores de unos con respecto a los otros, por lo que se requiere que aparezcan como variables en la función objetivo. Es por ello que los sencillos planteamientos de maximización o minimización de potenciales hidráulicos o extracciones han de transformarse en funciones aptas para ser tratadas con las técnicas de programación lineal. El presente trabajo tiene como finalidad mostrar la elaboración de algunas de estas funciones objetivo, de las restricciones provenientes de la ecuación de flujo tratada mediante diferencias finitas, de las relacionadas con las condiciones de contorno y de las demás auxiliares, para la optimización de explotaciones de agua subterránea, utilizando para ello varios ejemplos desarrollados sobre tipologías hidrogeológicas genéricas.

Los problemas de optimización que se contemplan son de dos tipos: Mantenimiento de la suma de los potenciales hidráulicos en su máximo posible para unas extracciones dadas del acuífero y obtención de las máximas extracciones para unos descensos limitados. En ambos casos el modelo asigna los puntos de bombeo y los volúmenes de extracción de cada pozo que reúnen estos requisitos.

Los distintos casos se han tratado para acuífero libre o confinado, flujo unidimensional en régimen permanente y para diferentes condiciones de contorno, discretizando el acuífero tipo en celdas y tratando la ecuación del flujo mediante diferencias finitas con el criterio de bloque centrado (S.G.O.P., 1972).

No se ha tratado ningún caso referente a acuíferos semiconfinados, ya que en la actualidad los modelos de gestión en estos acuíferos están en fase de investigación.

El software de programación lineal utilizado en las pruebas ha sido el “LinPro 2.0”, de uso libre, diseñado para ordenadores Apple Macintosh. (HARRIS, B. L. 1992).

CASOS TRATADOS.

CASO 1.

Acuífero libre.

Ejemplo: Acuífero de 2 Km. x 0.5 Km. Malla compuesta por 4 celdas cuadradas de 500 m. x 500 m., ($x = 500$), como se muestra en la figura 1. En ella se puede observar la existencia de otras dos celdas en ambos extremos, utilizadas como auxiliares para la solución de los problemas.

La altura piezométrica se simboliza como h_z ; ($z = 1,2,3,4$).

Espesor saturado inicial:

$E_n(h_5) = 100\text{ m.}; E_n(h_0) = 90\text{ m.}$

Permeabilidad: $K = 100\text{ m/día}$, media en todo el área.

La ecuación general del flujo es (Fórmula de BOUSSINESQ):

$((d/dx) K dh^2/dx) + 2W = 0$, siendo:

$h = \text{potencial (m)}; W = \text{extracción (m}^3 / \text{m}^2 \cdot \text{día)}.$

Para un tratamiento con programación lineal; $h^2 = V$, (REMSON *et al.* 1971), (AGUADO & REMSON,1974), por lo que:

$((d/dx) K dV/dx) + 2W = 0$

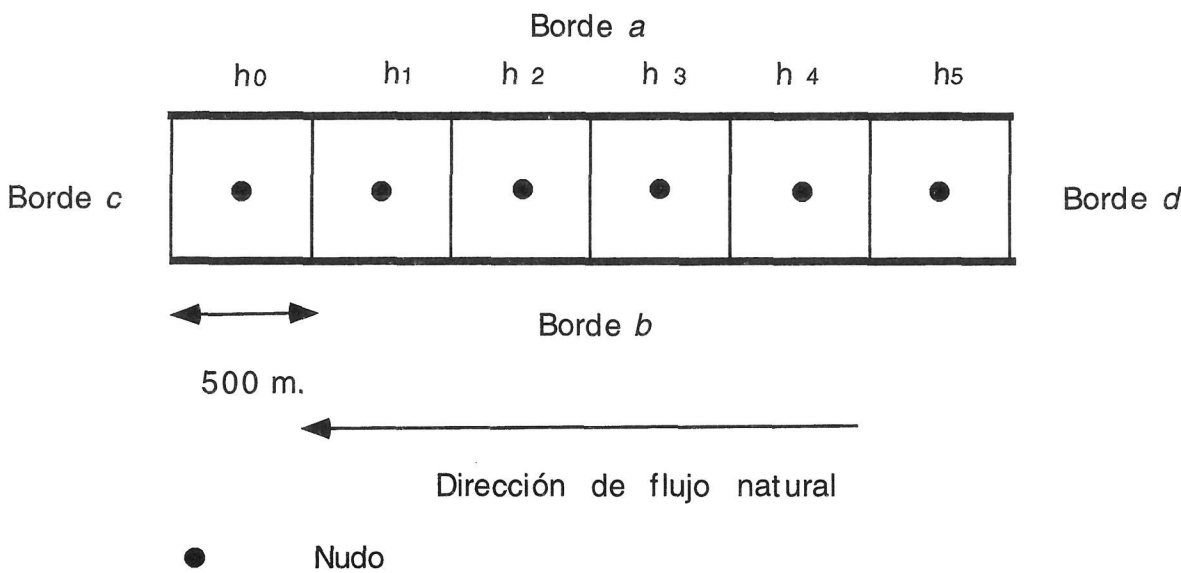


Figura 1

La ecuación de flujo, aproximada mediante diferencias finitas tiene la siguiente forma (S.G.O.P., 1972):

$$CP h_x + CAX h_{ant} + CPX h_{post} + W = 0, \quad (x = 1,2,3,4).$$

En la que:

CP: Coeficiente propio.: $CP = (2T_x / \Delta x^2)$

CAX: Coeficiente anterior en x.: $CAX = (T_{x+\Delta x} - T_{x-\Delta x} - 4T_x) / 4\Delta x^2$

CPX: Coeficiente posterior en x.: $CPX = -(T_{x+\Delta x} - T_{x-\Delta x} + 4T_x) / 4\Delta x^2$

h_x .: Potencial de la celda x.

h_{ant} .: Potencial de la celda anterior a x.

h_{post} .: Potencial de la celda posterior a x.

siendo en nuestro caso:

$$CP V_x + CAX V_{ant} + CPX V_{post} + 2W = 0 \quad (x = 1,2,3,4).$$

$$CP = 2K_x / x^2 ; CAX = -K_x / x^2 ; CPX = -K_x / x^2$$

La ecuación para cada celda es entonces:

$$V_3 - 2V_4 - (2x^2 / K) W_4 = -V_5$$

$$V_2 - 2V_3 + V_4 - (2x^2 / K) W_3 = 0$$

$$V_1 - 2V_2 + V_3 - (2x^2 / K) W_2 = 0$$

$$-2V_1 + V_2 - (2x^2 / K) W_1 = -V_0$$

CASO 1A.

Límites a y b impermeables y c y d de potencial constante. Se desea obtener el menor descenso del nivel freático del acuífero para unas extracciones requeridas.

La función objetivo a maximizar es:

$$F = \sum V_x \quad (x = 1,2,3,4).$$

La función equivalente en la que aparecen las variables W_x es:

$$F' = V_1 + 2V_2 + 2V_3 + V_4 - 5000 (\sum W_x) \quad (x = 1,2,3,4).$$

ya que:

$$V_1 = (V_2 - 5000 W_1 + 8100) / 2$$

$$V_2 = (V_1 + V_3 - 5000 W_2) / 2$$

$$V_3 = (V_2 + V_4 - 5000 W_3) / 2$$

$$V_4 = (V_3 - 5000 W_4 + 10000) / 2$$

igualdades obtenidas despejando en las ecuaciones de cada celda y siendo

$$V_0 = h_0^2 = 8100; V_5 = h_5^2 = 10000; (2x^2 / K) = 5000.$$

El planteamiento queda:

Maximizar:

$$V_1 + 2V_2 + 2V_3 + V_4 - 5000 (\sum W_x). \quad (x = 1, 2, 3, 4).$$

Restricciones:

$$V_3 - 2V_4 - 5000 W_4 = -10000$$

$$V_2 - 2V_3 + V_4 - 5000 W_3 = 0$$

$$V_1 - 2V_2 + V_3 - 5000 W_2 = 0$$

$$-2V_1 + V_2 - 5000 W_1 = -8100$$

$$\sum W_x = m \quad (x = 1, 2, 3, 4). \quad \text{A "m" se le da el valor deseado en cada caso.}$$

$$W_x \geq 0 \quad (x = 1, 2, 3, 4)$$

$$V_x \geq 0 \quad (x = 1, 2, 3, 4).$$

$$V_1 \leq 10000$$

Se puede restringir el valor de cualquier otro potencial y también asignar extracciones a celdas determinadas.

CASO 1B.

Límites a y b impermeables y c y d de potencial constante. Se desean obtener las mayores extracciones del acuífero con o sin imposiciones de potencial o extracción en alguna celda.

La función objetivo a maximizar es:

$$F = \sum W_x. \quad (x = 1, 2, 3, 4).$$

La función equivalente en la que aparecen las variables V_x es:

$$F' = 10000 W_1 + 5000 W_2 + 5000 W_3 + 10000 W_4 - V_1 - V_2 - V_3 - V_4$$

ya que:

$$W_1 = (-2V_1 + V_2 + 8100) / 5000$$

$$W_2 = (V_1 - 2V_2 + V_3) / 5000$$

$$W_3 = (V_2 - 2V_3 + V_4) / 5000$$

$$W_4 = (V_3 - 2V_4 + 10000) / 5000$$

igualdades obtenidas despejando en las ecuaciones de cada celda y siendo

$$V_0 = h_0^2 = 8100; V_5 = h_5^2 = 10000; (2x^2 / K) = 5000.$$

y, por ello:

$$\Sigma W_x = (18100 - V_1 - V_4) / 5000$$

Al ser:

$$-V_1 = (-8100 + 5000 W_1 - V_2) / 2$$

y

$$-V_2 = (5000 W_2 - V_3 - V_1) / 2$$

lleva a

$$-V_1 = ((-8100 + 5000 W_1) + (5000 W_2 - V_3 - V_1) / 2) / 2$$

y, al ser:

$$-V_4 = (-10000 - V_3 + 5000 W_4) / 2$$

y

$$-V_3 = (5000 W_3 - V_4 - V_2) / 2$$

lleva a

$$-V_4 = ((-10000 + 5000 W_4) + (5000 - W_3 - V_4 - V_2) / 2) / 2$$

Sustituyendo $-V_1$ y $-V_4$ en la ecuación de ΣW_x , se obtiene la función objetivo equivalente.

El planteamiento queda:

Maximizar:

$$-V_1 - V_2 - V_3 - V_4 + 10000 W_1 + 5000 W_2 + 5000 W_3 + 10000 W_4$$

Restricciones:

Las mismas que en el caso 1A excepto la

$$\Sigma W_x = m. \quad (x = 1, 2, 3, 4).$$

Los distintos casos se obtienen al restringir además los potenciales en los puntos deseados y fijando si se desea la extracción en alguna celda.

CASO 1C.

Límites a y b impermeables. Limitación del espesor saturado en los bordes c y d del acuífero y gradiente máximo limitado. La limitación del gradiente implica limitar el flujo lateral hacia la captación. Esta condición de contorno se aplica en

los casos en que se desea acotar una parte de un acuífero de gran extensión. Se desea obtener el menor descenso del nivel freático del acuífero para unas extracciones requeridas.

La función objetivo a maximizar es:

$$F = \sum W_x \quad (x = 0,1,2,3,4,5).$$

La función equivalente en la que aparecen las variables W_x es:

$$F' = 3V_0 + V_1 + 2V_2 + 2V_3 + V_4 + 3V_5 - 5000 (\sum W_x) \quad (x = 1,2,3,4).$$

ya que

$$V_1 = (V_2 - 5000 W_1 + V_0) / 2$$

$$V_2 = (V_1 + V_3 - 5000 W_2) / 2$$

$$V_3 = (V_2 + V_4 - 5000 W_3) / 2$$

$$V_4 = (V_3 - 5000 W_4 + V_5) / 2$$

igualdades obtenidas despejando en las ecuaciones de cada celda y siendo:

$$(2x^2 / K) = 5000.$$

En este caso han de aparecer las variables V_0 y V_5 en la función objetivo ya que han de estar presentes en las restricciones relativas al gradiente en los límites.

Fijando solamente el gradiente el modelo considera ya un flujo máximo de llegada lateral pero sin tener en cuenta que en acuífero libre el caudal también depende del espesor saturado. La solución que se puede elegir consiste en fijar un límite inferior a los potenciales en h_1 y h_4 y plantear las restricciones correspondientes.

El planteamiento queda:

Maximizar :

$$3V_0 + V_1 + 2V_2 + 2V_3 + V_4 + 3V_5 - 5000 (\sum W_x) \quad (x = 1,2,3,4).$$

Restricciones:

$$V_3 - 2V_4 + V_5 - 5000 W_4 = 0$$

$$V_2 - 2V_3 + V_4 - 5000 W_3 = 0$$

$$V_1 - 2V_2 + V_3 - 5000 W_2 = 0$$

$$V_0 - 2V_1 + V_2 - 5000 W_1 = 0$$

$$V_0 \leq 8100$$

$$V_5 \leq 10000$$

$$\sum W_x = m \quad (x = 0,1,2,3,4,5). \quad \text{A "m" se le da el valor deseado en cada caso}$$

$$W_x \geq 0 \quad (x = 0,1,2,3,4,5).$$

$$V_x \geq 0 \quad (x = 0,1,2,3,4,5).$$

$$V_0 - V_1 \leq 875 \quad \text{Restricción del gradiente máximo deseado.}$$

$$V_5 - V_4 \leq 975 \quad "$$

Se puede restringir el valor de cualquier potencial y también asignar extracciones a celdas determinadas.

Se añadirían las restricciones referentes al límite inferior de los potenciales en h1 y h4.

CASO 1D.

Con las mismas condiciones que el caso 1C, se desean obtener las mayores extracciones del acuífero con o sin imposiciones de potencial o extracción en alguna celda.

La función objetivo a maximizar es:

$$F = \sum W_x. \quad (x = 1,2,3,4).$$

La función equivalente en la que aparecen las variables V_x es:

$$F' = 2V_0 - V_1 - V_2 - V_3 - V_4 + 2V_5 + 10000 W_1 + 5000 W_2 + 5000 W_3 + 10000 W_4$$

ya que:

$$W_1 = (-2V_1 + V_2 + V_0) / 5000$$

$$W_2 = (V_1 - 2V_2 + V_3) / 5000$$

$$W_3 = (V_2 - 2V_3 + V_4) / 5000$$

$$W_4 = (V_3 - 2V_4 + V_5) / 5000$$

igualdades obtenidas despejando en las ecuaciones de cada celda y siendo:

$$(2x^2 / K) = 5000.$$

por lo que:

$$\sum W_x = (V_0 + V_5 - V_1 - V_4) / 5000$$

Al ser:

$$-V_1 = (-V_0 + 5000 W_1 - V_2) / 2$$

y

$$-V_2 = (5000 W_2 - V_3 - V_1) / 2$$

lleva a

$$-V_1 = ((-V_0 + 5000 W_1) + (5000 W_2 - V_3 - V_1) / 2) / 2$$

y, al ser:

$$-V_4 = (-V_5 - V_3 + 5000 W_4) / 2$$

y

$$-V_3 = (5000 W_3 - V_4 - V_2) / 2$$

lleva a

$$-V_4 = ((-V_5 + 5000 W_4) + (5000 W_3 - V_4 - V_2) / 2) / 2$$

Sustituyendo $-V_1$ y $-V_4$ en la ecuación de ΣW_x , se obtiene la función objetivo equivalente.

El planteamiento queda:

Maximizar:

$$2V_0 - V_1 - V_2 - V_3 - V_4 + 2V_5 + 10000 W_1 + 5000 W_2 + 5000 W_3 + 10000 W_4$$

Restricciones:

Las mismas que en el caso 1C excepto la

$$\Sigma W_x = m. \quad (x = 1,2,3,4).$$

Los diferentes casos se originan al fijar algún valor de V y/o W .

CASO 2.

Acuífero confinado.

Acuífero de 2 Km. x 0.5 Km. Malla compuesta por 4 celdas cuadradas de 500 m. x 500 m., ($x = 500$), como se muestra en la figura 1. En ella se puede observar la existencia de otras dos celdas en ambos extremos, utilizadas como auxiliares para la solución de los problemas.

La altura piezométrica se simboliza como h_z ; ($z = 1,2,3,4$).

Potenciales iniciales: (h_5) = 100 m.; (h_0) = 90 m., medidos desde la base del acuífero.

Permeabilidad: $K = 100$ m/día, media en todo el área. Espesor del acuífero: $b = 20$ m. Transmisividad: $T = 2000$ m. m / día.

La ecuación general del flujo es:

$$((d/d_x) T d_h / dx) + W = 0 \text{ (COOPER,1966); (PINDER \& BREDEHOEFT, 1968); (REMSON et al., 1971).}$$

h = potencial (m); w = extracción ($m_3 / m_2 \cdot \text{día}$).

La ecuación de flujo, aproximada mediante diferencias finitas tiene la siguiente forma, (S.G.O.P., 1972):

$$CP h_x + CAX h_{ant} + CPX h_{post} + W = 0, \quad (x = 1,2,3,4).$$

En la que:

CP: Coeficiente propio.: $CP = (2T_x / \Delta x^2)$

CAX: Coeficiente anterior en x .: $CAX = (T_{x+\Delta x} - T_{x-\Delta x} - 4T_x) / 4\Delta x^2$

CPX: Coeficiente posterior en x .: $CPX = -(T_{x+\Delta x} - T_{x-\Delta x} + 4T_x) / 4\Delta x^2$

h_x .: Potencial de la celda x .

h_{ant} .: Potencial de la celda anterior a x .

h_{post} .: Potencial de la celda posterior a x .

siendo en nuestro caso:

$$CP = 2T_x / x^2 ; CAX = -T_x / x^2 ; CPX = -T_x / x^2$$

La ecuación para cada celda es entonces:

$$h_3 - 2h_4 - (x^2 / T) W_4 = -h_5$$

$$h_2 - 2h_3 + h_4 - (x^2 / T) W_3 = 0$$

$$h_1 - 2h_2 + h_3 - (x^2 / T) W_2 = 0$$

$$-2h_1 + h_2 - (x^2 / T) W_1 = -h_0$$

CASO 2A.

Límites a y b impermeables. Gradiente máximo limitado en los bordes c y d del acuífero. La limitación del gradiente implica limitar el flujo lateral hacia la captación. Esta condición de contorno se aplica en los casos en que se desea acotar una parte de un acuífero de gran extensión. Se desea obtener el menor descenso del nivel freático del acuífero para unas extracciones requeridas.

La función objetivo a maximizar es:

$$F = \sum h_x \quad (x = 0,1,2,3,4,5).$$

La función equivalente en la que aparecen las variables W_x es:

$$F' = 3h_0 + h_1 + 2h_2 + 2h_3 + h_4 + 3h_5 - 125 (\sum W_x) \quad (x = 1,2,3,4).$$

ya que

$$h_1 = (h_2 - 125 W_1 + h_0) / 2$$

$$h_2 = (h_1 + h_3 - 125 W_2) / 2$$

$$h_3 = (h_2 + h_4 - 125 W_3) / 2$$

$$h_4 = (h_3 - 125 W_4 + h_5) / 2$$

igualdades obtenidas despejando en las ecuaciones de cada celda y siendo:

$$(x^2 / T) = 125$$

El planteamiento queda:

Maximizar :

$$3h_0 + h_1 + 2h_2 + 2h_3 + h_4 + 3h_5 - 125 (\sum W_x) \quad (x = 1,2,3,4).$$

Restricciones:

$$h_3 - 2h_4 + h_5 - 125 W_4 = 0$$

$$h_2 - 2h_3 + h_4 - 125 W_3 = 0$$

$$h_1 - 2h_2 + h_3 - 125 W_2 = 0$$

$$h_0 - 2h_1 + h_2 - 125 W_1 = 0$$

$$h_0 \leq 90$$

$$h_5 \leq 100$$

$$\sum W_x = m \quad (x = 0,1,2,3,4,5).$$

A “m” se le da el valor deseado en cada caso

$$W_x \geq 0 \quad (x = 0,1,2,3,4,5).$$

$$h_x \geq 20 \quad (x = 0,1,2,3,4,5).$$

Restricción para no perder el carácter de confinado.

$$h_0 - h_1 \leq 5$$

Restricción del gradiente máximo deseado.

$$h_5 - h_4 \leq 5$$

“

Se puede restringir el valor de cualquier potencial y también asignar extracciones a celdas determinadas.

CASO 2B.

Con las mismas condiciones que el caso 2A, se desean obtener las mayores extracciones del acuífero con o sin imposiciones de potencial o extracción en alguna celda.

La función objetivo a maximizar es:

$$F = \sum W_x. \quad (x = 1,2,3,4).$$

La función equivalente en la que aparecen las variables h_x es:

$$F' = 2h_0 - h_1 - h_2 - h_3 - h_4 + 2h_5 + 250 W_1 + 125 W_2 + 125 W_3 + 250 W_4$$

ya que:

$$W_1 = (-2h_1 + h_2 + h_0) / 125$$

$$W_2 = (h_1 - 2h_2 + h_3) / 125$$

$$W_3 = (h_2 - 2h_3 + h_4) / 125$$

$$W_4 = (h_3 - 2h_4 + h_5) / 125$$

igualdades obtenidas despejando en las ecuaciones de cada celda y siendo:

$$(x^2 / T) = 125$$

por lo que

$$\Sigma W_x = (h_0 + h_5 - h_1 - h_4) / 125$$

Al ser:

$$-h_1 = (-h_0 + 125 W_1 - V_2) / 2$$

y

$$-h_2 = (125 W_2 - h_3 - h_1) / 2$$

lleva a

$$-h_1 = ((-h_0 + 125 W_1) + (125 W_2 - h_3 - h_1) / 2) / 2$$

y, al ser

$$-h_4 = (-h_5 - h_3 + 125 W_4) / 2$$

y

$$-h_3 = (125 W_3 - h_4 - h_2) / 2$$

lleva a

$$-h_4 = ((-h_5 + 125 W_4) + (125 W_3 - h_4 - h_2) / 2) / 2$$

Sustituyendo $-h_1$ y $-h_4$ en la ecuación de ΣW_x , se obtiene la función objetivo equivalente.

El planteamiento queda:

Maximizar:

$$2h_0 - h_1 - h_2 - h_3 - h_4 + 2h_5 + 250 W_1 + 125 W_2 + 125 W_3 + 250 W_4$$

Restricciones:

Las mismas que en el caso 2A excepto la

$$\Sigma W_x = m. \quad (x = 1, 2, 3, 4).$$

Los diferentes casos se originan al fijar algún valor de V y/o W .

Para estos casos, el programa da un resultado que no considera a la vez la maximización de potenciales. Para que ello suceda hay que limitar inferiormente el potencial en algún punto de la malla y expresarlo en las restricciones. La función objetivo equivalente no se ve influida por esta circunstancia.

CONCLUSIONES.

Se desarrolla un método para elaborar las funciones objetivo y las restricciones de varios problemas típicos de optimización de captaciones de agua subterránea en régimen permanente, mediante el método del “embedding” con programación lineal.

La expresión de las funciones objetivo equivalentes elaboradas, tienen dependencia de las dimensiones de las celdas, del número de ellas, y de los valores de K y T .

En los casos de gradiente máximo fijo en los límites, han de aparecer en la función objetivo los potenciales de unas hipotéticas celdas externas contiguas a las extremas, como las h_0 (o V_0) y h_5 (o V_5).

En estos mismos casos, se han de acotar inferiormente los potenciales en las celdas extremas de la malla. Ello ha de plantearse como restricción pero no influye en la función objetivo.

Los resultados de la modelación para los casos de maximización de extracciones con gradiente máximo fijo, no contemplan a la vez la maximización de potenciales. Para que suceda hay que limitar inferiormente el potencial en alguna celda y darle expresión como restricción. La función objetivo equivalente no se ve influida por esta circunstancia.

BIBLIOGRAFÍA

- AGUADO, E., REMSON, I. (1974): Groundwater hydraulics in acuífer management. *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, **100**(HY1): 103-118.
- BACHMAT, Y., BREDEHOEFT, J., ANDREWS, B., HOLTZ, D., SEBASTIAN, S. (1980): Groundwater Management: The Use of Numerical Models. *Water Resour. Monogr. Ser.*, **5**, AGU, Washington, D.C.
- COOPER H.,JR. (1966): The equation of groundwater flow in fixed and deforming coordinates. *J. Geophys. Res.*, **71** (20): 4785-4790.
- GORELICK, S.M. (1983): A review of Distributed Parameter Groundwater Management Modeling Methods. *Water Resources Research*, **19**(2): 305-319.

HARRIS, B. L. (1992): *LINPRO. Linear Programming Software*. Iowa State University.

HEIDARI, M. (1982): Application of linear system,s theory and linear programming to groundwater management in Kansas. *Water Resources Bull.* **18(6)**: 1003-1012.

PINDER, G. F., BREDEHOEFT, J. (1968): Application of a digital computer for aquifer evaluation. *Water Resources Research*, **4(5)**: 1069-1093.

REMSON, I., HORNBERGER, G. M., MOLZ F. J. (1971): *Numerical Methods in Subsurface Hydrology*. Wiley-Interscience. New York.

SERVICIO GEOLÓGICO DE OBRAS PÚBLICAS. (1972): *Número dedicado al seminario sobre modelos analógicos y digitales para la explotación y administración de recursos hidráulicos subterráneos*. Boletín nº. **37**. M.O.P. Madrid.
