ISSN: 1576-7914 - e-ISSN: 2341-1902
DOI: https://dx.doi.org/10.14201/cuadieci2021221348

ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA SUPERIOR EN EL *CURSO MILITAR DE MATHEMATICAS* (1753-1756) DE PEDRO PADILLA

The Study of Higher Geometry in the Military Course of Mathematics *(1753-1756) of Pedro Padilla*

Mónica BLANCO
Escola d'Enginyeria Agroalimentària i de Biosistemes de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya
monica.blanco@upc.edu

Fecha de recepción: 03/10/2020
Fecha de aceptación definitiva: 26/07/2021

RESUMEN: En 1750 se creó en Madrid la Academia de Matemáticas dentro del Cuartel de Guardias de Corps, dirigida por Pedro Padilla y Arcos (1724-1807?) hasta su clausura en 1760. En 1753 Padilla empezó a publicar su *Curso Militar de Mathematicas, sobre partes de esta ciencia, para uso de la Real Academia establecida en el Cuartel de Guardias de Corps*. De los veinte tratados inicialmente programados, finalmente solo fueron publicados cinco (en cuatro volúmenes). El cuarto tratado, *De la Geometría Superior, o de las Curvas* (1756), puede ser considerado como el primer manual publicado en España íntegramente dedicado al estudio de la geometría analítica. En él Padilla trataba de la construcción geométrica de las ecuaciones, las líneas de primer orden y de segundo orden (o cónicas) y la resolución de problemas geométricos diversos. El análisis de este tratado contribuye al conocimiento sobre el estudio de la geometría analítica en la España del XVIII.

Palabras clave: Pedro Padilla; Academia de Matemáticas; *Curso Militar de Mathematicas*; geometría analítica.

ABSTRACT: Toward the end of 1750, an Academy of Mathematics was established at the Royal Guards Barracks in Madrid and was ruled by Pedro Padilla (1724-1807?) until it was dissolved in 1760. In 1753, Padilla authored and published his *Military Course of Mathematics* (1753-1756) for the specific use by this Academy. Of the twenty mathematical treatises that Padilla originally intended to develop, only the first five would be published in the end (in four volumes). The fourth treatise, *On higher geometry, or geometry of curves* (1756), can be regarded as the earliest educational book on analytic geometry published in Spain. In this treatise Padilla dealt with the geometrical construction of equations, conic sections and the resolution of a wide variety of geometrical problems. The analysis of this treatise contributes evidences of the study of analytical geometry in 18th-century Spain.

Key words: Pedro Padilla; Academy of Mathematics; *Military Course of Mathematics*; analytic geometry.

1. Introducción

En 1717 Felipe V estableció en Madrid el Cuartel de Guardias de Corps, tomando como modelo la *garde du corps du roi* de Francia. Se trataba de una institución elitista, dirigida principalmente a nobles y oficiales. Hacia finales de 1750 se creó la Academia de Matemáticas dentro del Cuartel de Guardias de Corps, que seguía las mismas regulaciones que la Real Academia Militar de Matemáticas de Barcelona[1]. La asistencia no era obligatoria, en realidad las clases se dirigían principalmente a aquellos alumnos interesados en adquirir un conocimiento matemático más profundo[2]. Se nombró director de la Academia al capitán Pedro Padilla

1. El funcionamiento y la enseñanza de las matemáticas en la Real Academia Militar de Matemáticas de Barcelona ha sido ampliamente estudiado en Capel, Horacio; Sánchez, Joan Eugeni y Moncada, Omar. *De Palas a Minerva. La formación científica y la estructura institucional de los ingenieros militares en el siglo XVIII*. Barcelona: CSIC, Ediciones El Serbal, 1988; Massa-Esteve, Maria Rosa; Roca-Rosell, Antoni y Puig-Pla, Carles. «Mixed mathematics in engineering education in Spain: Pedro Lucucés course at the Barcelona Royal Military Academy of Mathematics in the eighteenth century». *Engineering Studies*, 2011, 3 (3), pp. 233-253; Massa-Esteve, Maria Rosa. «La Reial Acadèmia de Matemàtiques de Barcelona. Matemàtiques per a enginyers». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 2014, XIV, pp. 17-34; Muñoz Corbalán, Juan Miguel. *L'Acadèmia de Matemàtiques. El llegat dels Enginyers Militars*. Barcelona: Secretaría General Técnica del Ministerio de Defensa, 2004; y Riera, Joan. «L'Acadèmia de Matemàtiques a la Barcelona Il·lustrada (1715-1800)». En *Actes del II Congrés Internacional d'Història de Medicina Catalana*. Barcelona, 1975, pp. 73-128.

2. Sobre la creación y organización de la Academia de Matemáticas, véase Blanco, Mónica. «The Mathematical Courses of Pedro Padilla and Étienne Bézout: Teaching Calculus in Eighteenth-Century Spain and France». *Science & Education*, 2013, 22 (4), pp. 769-788; Blanco, Mónica y Massa-Esteve, Maria Rosa. «La matemática pura en los cursos militares de matemáticas de Pedro Lucuce (1739-44) y de Pedro Padilla (1753-56)». En Ruiz-Berdún, D. (ed.). *Ciencia y técnica en la universidad: trabajos de historia de las ciencias y de las técnicas*. Alcalá de Henares: Universidad de Alcalá, 2018, vol. II, pp. 167-178; Hidalgo, Encarna. «El Aula de Matemáticas de los Guardias de Corps (1750-1761)». En Valera, M. y López Fernández, C. (eds.). *Actas del V Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias*

(1724-1807?), que desempeñó este cargo hasta el cierre de la Academia en 1760[3]. A pesar de ser una academia pequeña, con alrededor de quince estudiantes por curso, un director y dos ayudantes, poseía una biblioteca muy bien surtida[4].

La creación de la Academia puede considerarse como una de las iniciativas llevadas a cabo por Zenón de Somodevilla (1702-1781), marqués de la Ensenada, para renovar, mejorar y uniformizar la formación científica, tanto a nivel militar como naval[5]. Como parte de sus reformas, en la década de 1750 se establecieron nuevas academias militares para la formación científico-técnica, entre otras, la Academia de Matemáticas del Cuartel de Guardias de Corps. Además, el marqués de la Ensenada también fomentó la producción de obras educacionales en español que podrían resultar en una formación mejor y más uniforme en todas las academias militares[6].

En 1753 Padilla empezó a publicar el *Curso Militar de Mathematicas para el uso de la Academia de Matemáticas del Cuartel de Guardias de Corps* (Figura 1)[7], que puede ser considerado como producto de las reformas promovidas por el marqués de la Ensenada. Del prefacio del primer volumen resulta evidente que el objetivo de Padilla era mostrar los fundamentos de cada rama de las matemáticas y su utilidad no solo para caballería e infantería, sino también para artillería, marina e ingeniería. Los cursos impartidos en la Real Academia Militar de Matemáticas de Barcelona eran elaborados por el director, dictados por los profesores y ayudantes y copiados por los alumnos en cuadernos, tal como se recoge en las ordenanzas reales[8]. El motivo principal de la publicación de su *Curso*, tal como indica Padilla en su dedicatoria al rey Fernando VI, era liberar a los estudiantes de tomar notas. En ese sentido, al tratarse de un curso impreso, la obra de Padilla representa una innovación en los métodos pedagógicos utilizados hasta ese momento[9].

---

y de las Técnicas, vol. II. Murcia: DM-PPU, 1991; LAFUENTE, Antonio y PESET, José Luis. «Las Academias Militares y la inversión en ciencia en la España ilustrada (1750-1760)». *Dynamis*, 1982, 2, pp. 193-209.

3. Se puede encontrar más información sobre Pedro Padilla en CUESTA DUTARI, Norberto. *Historia de la invención del análisis infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca, 1985, pp. 136-137.

4. Se puede consultar el catálogo de la biblioteca en CUESTA DUTARI (1985), *op. cit.*, pp. 127-133.

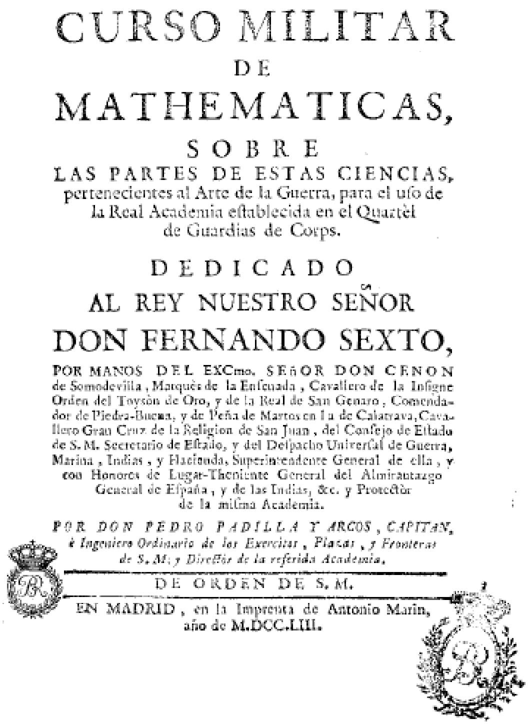
5. Véase BLANCO, Mónica y PUIG-PLA, Carles. «The role of mathematics in Spanish military education in the 1750's: Two transient cases». *Philosophia Scientiæ*, 2020, 24-1 (1), pp. 97-113.

6. CAPEL *et al*. (1988), *op. cit.*, p. 161.

7. PADILLA, Pedro. *Curso Militar de Mathematicas, sobre partes de esta ciencia, para uso de la Real Academia establecida en el Cuartel de Guardias de Corps*. Madrid: Antonio Marín, 1753-1756.

8. PORTUGUES, Joseph Antonio. *Colección General de las Ordenanzas Militares, sus Innovaciones, y Aditamentos, dispuesta en diez tomos y con separación de clases*, vols. V-VI. Madrid: Imprenta de Antonio Marín, 1765, VI, p. 867.

9. En BLANCO y MASSA-ESTEVE (2018), *op. cit.*, y BLANCO y PUIG-PLA (2020), *op. cit.*, se reflexiona sobre el enfoque pedagógico del *Curso* de Padilla.



CURSO MILITAR
DE
MATHEMATICAS,
SOBRE
LAS PARTES DE ESTAS CIENCIAS,
pertenecientes al Arte de la Guerra, para el uso de
la Real Academia establecida en el Quartèl
de Guardias de Corps.

DEDICADO
AL REY NUESTRO SEÑOR
DON FERNANDO SEXTO,
POR MANOS DEL EXCmo. SEÑOR DON CENON
de Somodevilla, Marquès de la Ensenada, Cavallero de la Insigne
Orden del Toysòn de Oro, y de la Real de San Genaro, Comendador de Piedra-Buena, y de Peña de Martos en la de Calatrava, Cavallero Gran Cruz de la Religion de San Juan, del Consejo de Estado
de S. M. Secretario de Estado, y del Despacho Universal de Guerra,
Marina, Indias, y Hacienda, Superintendente General de ella, y
con Honores de Lugar-Theniente General del Almirantazgo
General de España, y de las Indias, &c. y Protectòr
de la misma Academia.

*POR DON PEDRO PADILLA Y ARCOS, CAPITAN,
è Ingeniero Ordinario de los Exercitos, Plazas, y Fronteras
de S. M. y Directòr de la referida Academia.*

DE ORDEN DE S. M.

EN MADRID, en la Imprenta de Antonio Marin,
año de M.DCC.LIII.

Figura 1. Frontispicio del *Curso Militar de Mathematicas* de Padilla.

El carácter elemental del curso fue bien recibido, como se deduce de la crítica positiva que de todos los tratados publicados hizo Jorge Juan (1713-1773): alababa la claridad, la extensión y el orden utilizado por Padilla para tratar todas las ramas de las matemáticas y, en consecuencia, recomendaba su uso. Hecho notable, dado el interés de Jorge Juan por mejorar la formación científica en España y el apoyo institucional con el que contaba, especialmente del marqués de la Ensenada.

De los veinte tratados que Padilla originalmente había proyectado, solo se publicaron cinco (en cuatro volúmenes): I. Aritmética vulgar; II. Geometría elemental, o de Euclides; III. Álgebra; IV. Geometría superior, o de las curvas; V. Cálculo diferencial e integral, o método de las fluxiones. El cuarto volumen del curso de Padilla, que contiene los tratados IV y V, es el más novedoso. Por un lado, hay que destacar que el quinto tratado del curso de Padilla es el primer texto español impreso dedicado a la enseñanza del cálculo diferencial e integral[10].

10. En BLANCO (2013), *op. cit.*, se analizan ciertos aspectos de este tratado. Para una introducción histórica del cálculo infinitesimal en España, véase AUSEJO, Elena y MEDRANO-SÁNCHEZ, Francisco J.

Por otro lado, el cuarto tratado trata de la construcción geométrica de las ecuaciones, las líneas de primer orden y de segundo orden (o cónicas) y la resolución de problemas geométricos diversos. Es decir, el contenido de este tratado está relacionado con el estudio y aplicación de la geometría analítica de René Descartes (1596-1650). Aunque de forma tardía, la actividad matemática en la España de finales del XVII y principios del XVIII estaba familiarizada con la geometría analítica, como muestran los trabajos de Hugo de Omerique (1634-1705), Pedro de Ulloa (1663-1721) o Tomás Vicente Tosca (1651-1723), entre otros[11]. Según Navarro Brotons (1997), el primer texto publicado en España que trata, si bien de forma breve, la geometría analítica es *Elementos de Matemáticas* (1706), de Pedro de Ulloa (1663-1721). En el primer tomo de su obra, Ulloa habla puntualmente sobre representación algebraica de curvas y teoría algebraica de ecuaciones de Descartes. El segundo tomo debía contener «los principios de la álgebra y su aplicación a la geometría»[12], pero no llegó a publicarse. Por otra parte, si bien es cierto que el *Compendio Mathematico* (1707-1715) de Tomás Vicente Tosca (1651-1723) contiene el primer tratado de cónicas publicado en castellano (tomo III), no trata la geometría analítica, siendo tratadas las cónicas desde el punto de vista geométrico, pero sin ecuaciones[13].

Así pues, el cuarto tratado del curso de Padilla, *De la Geometría Superior, o de las Curvas*, puede ser considerado como el primer manual publicado en España íntegramente dedicado al estudio de la geometría analítica de Descartes. Sin embargo, en el excelente estudio de Cuesta Dutari sobre la introducción del cálculo infinitesimal en España se trata solo de pasada el tratado cuarto de Padilla. Únicamente se indica que para la elaboración de este tratado el libro utilizado por Padilla fue el primer tomo de los *Elementa Matheseos Universae* (1713) de Christian Wolff (1679-1754) y que su índice se asemeja al del *Traité analytique des sections coniques* (1707) del marqués de L'Hospital (1661-1704)[14]. Si bien, como se verá más adelante, es innegable la influencia de Wolff en la obra de Padilla, una lectura más profunda refleja otras influencias, otras posibles fuentes de inspiración. Así pues, el objetivo de este trabajo es analizar el cuarto tratado del curso de Padilla y comparar su contenido y tratamiento de algunos problemas con obras de

«Construyendo la modernidad: nuevos datos y enfoques sobre la introducción del cálculo infinitesimal en España (1717-1787)». *Llull*, 2010, 33 (71), pp. 25-56; CUESTA DUTARI (1985), *op. cit.*

11. Sobre el tratamiento de la geometría analítica en Omerique, Ulloa y Tosca, véase DORCE, Carles. *Historia de las matemáticas en España. II: De los Novatores al siglo XX*. Sant Cugat: Arpegio, 2017, pp. 8-24; 31-62; DOU, Albert. *Las Matemáticas en la España de los Austrias*. Universitat Autònoma de Barcelona, 1990; y NAVARRO BROTONS, Víctor. «Descartes y la introducción en España de la ciencia moderna». En *La filosofía de Descartes y la fundación del pensamiento moderno*. Sociedad Castellano-Leonesa de Filosofía, 1997, pp. 225-252.

12. NAVARRO BROTONS (1997), *op. cit.*, p. 235.

13. DORCE (2017), *op. cit.*, p. 62; NAVARRO BROTONS (1997), *op. cit.*, p. 243.

14. CUESTA DUTARI (1985), *op. cit.*, pp. 124-125.

referencia[15]. El análisis de este tratado contribuye al conocimiento sobre el estudio de la geometría analítica en la España del XVIII.

2. *De la Geometría Superior, o de las Curvas*, de Pedro Padilla

El Tratado IV, *De la Geometría Superior, o de las Curvas* (1756), consta de 151 páginas, con un total de 187 apartados y 93 figuras. Empieza con nueve definiciones (§§1-11). A continuación, el tratado está dividido en las siguientes secciones:

- Construccion geometrica de las equaciones (§§12-40)
- De las lineas del primer orden (§§41-45)
- De las lineas del segundo orden, ò Curvas del primer genero (§§46-91)
- De las secciones conicas (§§92-125)
- De otras curvas (§§126-129)
- De los problemas geometricos (§§130-135)
- De las divisiones de una recta (§§136-149)
- De los polygonos regulares, y su inscripcion en el circulo (§§150-162)
- De los triangulos (§§163-174)
- De los quadrilateros (§§175-176)
- De los problemas solidos (§§177-187)

En relación a la estructura del Tratado IV, como ya he comentado más arriba, Cuesta Dutari considera que el índice de Padilla se asemeja al del tratado de cónicas de L'Hospital (1707)[16]. Si bien es cierto que Padilla dedica una buena parte de su tratado al estudio de las cónicas, que ocupan la parte central de su tratado, L'Hospital empieza su obra justamente con el estudio de las cónicas, dejando para el final, para el libro noveno, la construcción de ecuaciones. Una rápida comparación con *La Géométrie* de Descartes permite intuir el esquema seguido por Padilla, con excepción de las secciones dedicadas a problemas geométricos y polígonos. Esquema que, de algún modo, también se observa en el Libro VIII del *Analyse démontrée* (1708) de Charles Reyneau (1656-1728) y en la sección segunda de la primera parte de los *Elementa Analyseos*, contenidos en el primer tomo de los *Elementa Matheseos Universae* (1713) de Wolff[17]. Así, la primera sección del Tratado

15. Para este trabajo he tomado en cuenta obras que se encuentran en el catálogo de la biblioteca de la Academia de Matemáticas de Guardias de Corps [recogido en Cuesta Dutari (1985), *op. cit.*, pp. 127-133] y que, por tanto, habrían estado a disposición de Padilla en el momento de preparar y elaborar el Tratado IV.

16. Cuesta Dutari (1985), *op. cit.*, p. 125.

17. Sobre el *Analyse démontrée* de Reyneau y los *Elementa Analyseos* de Wolff se puede consultar Schubring, Gert. *Conflicts between generalization, rigor, and intuition*. New York: Springer, 2005, pp. 81-83 y 95-97, respectivamente.

IV de Padilla está relacionada con el Libro I *(De los problemas que se pueden construir usando exclusivamente las circunferencias y las líneas rectas)*; las cuatro siguientes secciones tratan las líneas curvas, como el Libro II *(De la naturaleza de las líneas curvas)*; y, finalmente, la última sección hace clara referencia al Libro III *(De la construcción de los problemas sólidos, o más que sólidos)*. La estructura y la utilización explícita del término «sólido» parecen indicar que una de las fuentes del tratado de Padilla fue precisamente la obra de Descartes. Hipótesis plausible, ya que en el catálogo de la Biblioteca de la Academia de Matemáticas de Guardias de Corps publicado por Cuesta Dutari se encuentra la obra crítica *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes* (1730) de Claude Rabuel (1669-1729)[18].

De hecho, en dicho catálogo se encuentran diversas obras de referencia que tratan sobre la geometría de curvas. Más aun, por un documento que se halla en el Archivo General de Simancas se sabe que en 1752 Padilla presidió unos exámenes en la Academia de Matemáticas del Cuartel de Guardias de Corps. El hecho de que algunos de estos propusieran cuestiones sobre las cónicas, sobre las ecuaciones superiores y su resolución o sobre la geometría sublime o de las curvas pone de manifiesto que esta materia se enseñaba en la Academia antes incluso de la publicación del Tratado IV de Padilla[19].

En las secciones siguientes se analizarán las definiciones que aparecen al principio del Tratado IV de Padilla, así como la construcción geométrica de las ecuaciones, el estudio de las curvas y la resolución de problemas geométricos.

3. Primeras definiciones

En el Tratado IV Padilla empieza definiendo qué es la *Geometría Superior*:

> DEFINICIÓN I. Por Geometrìa Superior entendemos aquella parte de esta ciencia, que se ocupa en averiguar las propiedades de las Lineas Curvas, superficies procedentes de ellas, y sólidos producidos de estas. La Geometrìa Elementar solo trata de las propiedades del Circulo, y Linea recta, como vimos; pero la Superior indaga las de qualquier genero de Curvas, suponiendo la noticia del Circulo, y Linea recta como fundamento[20].

18. Cuesta Dutari (1985), *op. cit.*, pp. 127-133. En Maronne, Sébastien. «Les Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes (1730) de Claude Rabuel». En Crépel, P. y Schmit, C. (eds.). *Autour de Descartes et Newton. Le paysage scientifique lyonnais dans le premier XVIIIe siècle.* Paris: Hermann, 2017, pp. 111-161 y 349-355 (Anexo) se analiza la obra de Rabuel.

19. *Conclusiones Mathematicas, sobre los tratados de Arithmetica, Geometrìa Elementàr, Trigonometrìa, Geometrìa Práctica, Algebra, Geometrìa Sublime, y Calculos Diferencial, è Integràl. Defendidas en el Quartel de Guardias de Corps de Madrid.* Madrid: Antonio Marín, 1752 (AGS Guerra Moderna, 3778), pp. 32-37, 38-42, 49-50.

20. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §1.

Esta definición coincide con la de «geometría sublime» de Wolff y la de «geometría superior» de Reyneau. Sin embargo, a nivel de clasificación, o división, de las matemáticas, se observan diferentes matices. Como se expone en la introducción del *Curso*, la Geometría Superior es una rama de la Geometría, que se divide en «Elementar, Espherica, y Superior»[21]. En este sentido su clasificación recuerda a la del *système figuré* del *Discours Préliminaire* de la *Encyclopédie*, según la cual la Geometría se divide en Elemental y Transcendente, tratando esta última de todo tipo de curvas[22]. Así mismo, según Padilla, el Álgebra se divide en elemental e infinitesimal, estando la última a su vez dividida en cálculo diferencial e integral, tal como se muestra en el *système figuré*[23]. Esta división de las matemáticas no es exactamente la que encontramos en la obra de Wolff. El volumen *Elementa Analyseos* está dividido en dos partes, finito e infinito[24]. La primera parte está a su vez dividida en aritmética especiosa y álgebra, y esta última contiene la Geometría Sublime[25]. Aunque sin referencias explícitas, la división de las matemáticas presentada por Padilla en su *Curso* ilustra la recepción temprana y la circulación de la *Encyclopédie* en España[26].

A continuación, Padilla define *origen*, *abscisas*, *aplicadas* (es decir, ordenadas) y *eje de las abscisas*:

> DEFINICIÓN II. Sea *XVZ* qualquier linea: *AVPB* qualquier recta indefinida dada en qualquier posicion: *A* qualquier punto elegido en ella: *PM* qualesquiera rectas paralelas tiradas sobre la misma en qualquier angulo desde los puntos *M* de la curva. Baxo este supuesto las *AP* se llaman *abscisas*: las paralelas *PM aplicadas*: el punto *A origen de las abscisas*: y la recta *AP eje de las abscisas*[27].

21. PADILLA (1753), *op. cit.*, I, §22.

22. D'ALEMBERT, Jean le R. y DIDEROT, Denis. *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres*, 1751–. University of Chicago: ARTFL Encyclopédie Project (Spring 2011 Edition). Robert Morrissey (ed.). http://encyclopedie.uchicago.edu/, I.

23. PADILLA (1753), *op. cit.*, I, §21; BLANCO (2013), *op. cit.*, p. 74. En algún caso la clasificación de Padilla difiere de la de D'Alembert. Así, mientras que para D'Alembert la arquitectura militar forma parte de la Geometría (dentro de las matemáticas puras), Padilla la considera como parte de las matemáticas mixtas [PADILLA (1753), *op. cit.*, I, §30].

24. Véase WOLFF, Christian. *Elementa Analyseos Mathematicae. Pars Prima, Elementa Analyseos finitorum tradit,* dentro del primer tomo de los *Elementa Matheseos Universae*. Halle, 1713. Para este trabajo he consultado la edición de 1732, Genève: Marcum Michaelem Bousquet & Socios, tomo I, pp. 235-416.

25. WOLFF (1713), *op. cit.*, cap. VI (§§367-583).

26. Hasta 1759, año en que se prohíbe en España la *Encyclopédie*, se puede observar su utilización en los contenidos de publicaciones en castellano antes de esa fecha, tal como señala SÁNCHEZ-BLANCO PARODY, Francisco. *Europa y el pensamiento español del siglo XVIII.* Madrid: Alianza Editorial, 1991, p. 82.

27. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §2.

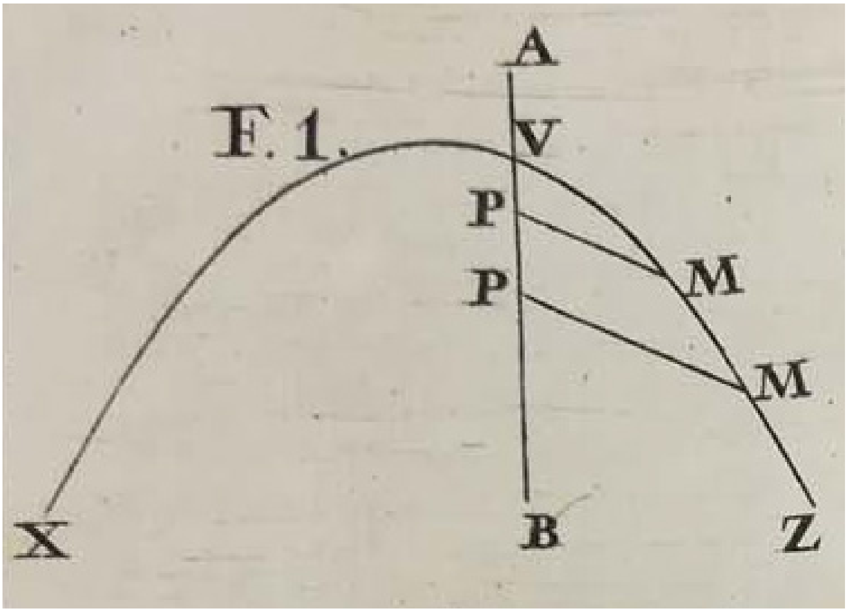


Figura 2. Lámina I, Figura 1 del Tratado IV de Padilla (1756).

Para Padilla el origen *A* es un punto cualquiera sobre una recta que, por tanto, se puede entender como fuera de la curva (Figura 2). La definición de Padilla parece estar en línea con la de Reyneau, quien también establece el origen como punto fijo a partir del cual se origina una recta dada dentro del plano donde se halla la curva:

> On suppose sur le plan où est chaque courbe une ligne droite dont la position est donnée sur le plan, & un point fixe d'où elle part, qu'on nomme son origine, qui est aussi donné[28].

Así mismo, tanto para Padilla, como para Reyneau, el eje de abscisas («la ligne des coupées»), es una línea recta cualquiera, independiente de la curva. En cambio, Wolff primero define el *diámetro* de una curva como la recta *AD* que biseca las rectas paralelas *MM* en *P* (Figura 3), que llama *eje* cuando corta en ángulos rectos[29]. El *vértice* de la curva es el punto *A*, del cual parte el diámetro[30]. Finalmente, Wolff define las abscisas como parte del diámetro, u otra línea, a la

28. REYNEAU, Charles. *Analyse démontrée ou la méthode pour résoudre les problêmes Mathématiques*. Paris: Quillau Imprimeur, 1708, II, prefacio vj.
29. WOLFF (1713), *op. cit.*, §368.
30. WOLFF (1713), *op. cit.*, §369.

que la curva se refiere, comprendida entre el vértice o un punto fijo, y el punto donde la semiordenada interseca la curva, entendiendo por *semiordenada* la línea *PM* y por ordenada la línea *MM* (la semiordenada sería la ordenada en el caso de Padilla), como muestra la Figura 3[31]. Es claro, pues, que para Wolff origen y eje de abscisas son elementos ligados a la curva. De hecho, después de definir Geometría Sublime, define diámetro y vértice de una curva, antes de definir abscisas y ordenadas. El planteamiento de Padilla parece indicar un enfoque más general, no tan ligado a la curva.

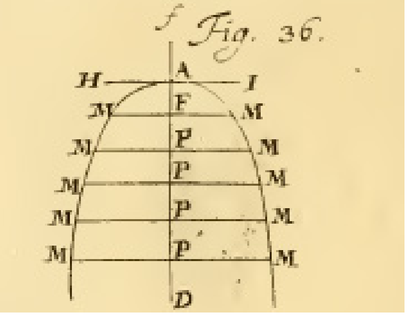


Figura 3. Álgebra: Tab. III, Figura 36 de Wolff (1713).

En relación a las «aplicadas», pueden ser rectángulas (si el ángulo del eje con las aplicadas es recto) u oblicuángulas (si el ángulo es agudo u obtuso), según la DEFINICIÓN III de Padilla[32]. Reyneau también se refiere al ángulo de las coordenadas, mientras que Wolff parece fijarse solo en el caso en que los ejes son perpendiculares[33].

En las dos siguientes definiciones Padilla hace una primera clasificación de líneas curvas:

> DEFINICIÓN IV. Lineas *curvas continuas* se dicen aquellas en que la relacion de las abscisas con las aplicadas es siempre una misma; y discontinuas quando esta relacion es variada[34].

Al no encontrar esta definición ni en Wolff ni en Reyneau, en un primer momento este apartado me hizo pensar en la definición de continuidad dada

31. WOLFF (1713), *op. cit.*, §§370-371.
32. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §3.
33. REYNEAU (1708), *op. cit.*, VIII, §353; WOLFF (1713), *op. cit.*, §368. En relación a la introducción del sistema de ejes de coordenadas en *La Géométrie* de Descartes, que pueden ser oblicuas o rectangulares, veáse PLA, Josep y VIADER, Pelegrí. *René Descartes. La geometria*. Introducción, traducción y notas de Pla y Viader. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans/Pòrtic/Eumo, 1999, p. 31.
34. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §4.

por Leonhard Euler (1707-1783) en su *Introductio in analysin infinitorum*, obra que se halla en el catálogo de la Biblioteca de la Academia de Matemáticas. Euler define una curva como *continua* si «su carácter se expresa por una única función de *x*», mientras que si se expresa mediante funciones de *x* diferentes, entonces la llama *discontinua*, mixta, o irregular, y en este caso se compone de porciones de diversas curvas continuas[35].

Pero al no referirse Padilla a funciones ni en este tratado ni en el tratado V, da la impresión de que quizás no fuera Euler la fuente utilizada por Padilla en este caso. Ahora bien, la definición de «líneas regulares» que aparece en el tratado sobre líneas curvas algebraicas de 1750 de Gabriel Cramer (1704-1752) (también en el catálogo de la Biblioteca de la Academia de Matemáticas)[36] resulta muy similar a la de «líneas continuas» de Padilla:

> Les lignes régulières sont, au contraire, celles qui sont décrites suivant une loi constante qui détermine la positition de tous leurs points. Il y a quelque propriété uniforme qui convient également à tous les points d'une même ligne régulière…[37].

El tratado de Padilla se acercaría más al texto de Cramer, un tratado sobre líneas curvas algebraicas, que a la obra de Euler[38]. Y la siguiente definición viene a corroborar esta hipótesis.

> DEFINICIÓN V. *Curvas Algebricas* se dicen aquellas cuya relacion entre abscisas, y aplicadas se puede expressar algebricamente; y *transcendentes* las que carecen de esta circunstancia, esto es, que en las primeras sean racionales las potencias de las abscisas, y aplicadas, è irracionales en las segundas[39].

Que la relación se pueda expresar de forma algebraica se puede entender en el sentido de Wolff y Reyneau, a partir de relaciones entre abscisas y aplicadas expresadas mediante «ecuaciones algebraicas»[40]. Sin embargo, en la segunda parte

35. Euler, Leonhard. *Introductio in analysin infinitorum*. Lausanne, 1748, en dos volúmenes, II, cap. I, §9. Traducción española de J. L. Arantegui, con los estudios de Mariano Martínez Pérez, Antonio J. Durán y Javier Ordóñez. Sevilla: RSME y la SAEM Thales, 2003. Esta definición de continuidad corresponde al concepto de función continua derivable. La obra *Introductio in analysin infinitorum* de Euler contribuyó de manera esencial a la elaboración del concepto de función. Siete años más tarde, en su tratado sobre cálculo diferencial, Euler proponía un tratamiento completo de la derivación funcional, otorgando un rol crucial al concepto de función de una variable independiente.

36. La tesis doctoral Joffredo, Thierry. *Approches biographiques de l'*Introduction à l'analyse de lignes courbes algébriques *de Gabriel Cramer*. Tesis doctoral, 2017 [accesible en: http://www.theses.fr/2017LORR0255] se centra en esta obra de Cramer.

37. Cramer, Gabriel. *Introduction à l'analyse de lignes courbes algébriques*. Genève: chez les frères Cramer et C. Philibert, 1750, §2.

38. Si hacemos caso al propio Cramer en el prefacio de su obra, parece que no conocía la obra *Introductio in analysin infinitorum* de Euler cuando elaboraba la suya.

39. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §5.

40. Wolff (1713), *op. cit.*, §377 y 380; y Reyneau (1708), *op. cit.*, VIII, p. 56.

de la definición V, Padilla parece alejarse de Euler, volviendo aquí a recordar a la clasificación de Cramer. En relación a las curvas regulares que no pueden ser expresadas mediante una ecuación analítica, Cramer identifica transcendente con irracional y algebraica con racional:

> Ces sortes de courbes sont apellées *transcendantes*, *méchaniques*, ou *irrationelles*; pour les distinguer de celles qu'on peut représenter par des équations algébriques, & qu'à cause de cela on nomme courbes *algébriques*, *géométriques*, ou *rationelles*[41].

Entre las algebraicas y las transcendentes, se puede hablar de las exponenciales, y entre las algebraicas y las exponenciales se encuentran aquellas que Leibniz denomina «*interscendentes*», aquellas cuyas ecuaciones presentan términos con exponentes irracionales[42]. Justamente en el Tratado III, sobre álgebra, Padilla clasifica las potencias en racionales o algebraicas, e irracionales o transcendentes (aunque no habla explícitamente de *interscendentes*). Como ejemplo de las últimas, aunque «no son de nuestro intento», propone la siguiente expresión[43]: $a^{\sqrt[2]{3}} = a^{3^{1/2}}$. Euler[44] critica la tendencia de llamar «*interscendentes* mejor que algebraicas a las potencias de z cuyo exponente sea número irracional, como $z^{\sqrt{2}}$». La distinción irracional/«no irracional» la usa Euler para clasificar las funciones algebraicas[45]; en las irracionales las cantidades variables están afectadas por signos radicales, al contrario que las «no irracionales». Las funciones «no irracionales» se dividen, a su vez, en polinómicas y racionales[46]. Así, según se ha visto, Padilla parece seguir, si bien de manera un poco confusa, la clasificación de curvas expuesta por Cramer. Aunque en el Tratado IV Padilla trabaja esencialmente con curvas algebraicas, estas dos definiciones denotan cuando menos que Padilla pudo haber consultado obras matemáticas contemporáneas para la elaboración del tratado.

Tras la clasificación de curvas, Padilla procede a definir cantidad variable y cantidad constante:

> DEFINICIÓN VI. Por *cantidades variables* suponemos aquellas que continuamente son capaces de aumento, ò disminucion, hasta degenerar en otras conocidas, ya sean cero, finitas, ò infinitas. *Las cantidades variables se denotaràn con las ultimas letras,* v, x, y &c[47].

> DEFINICIÓN VII. Las *cantidades constantes* son aquellas que teniendo un determinado valor, no pueden ser mayores, ni menores de lo que son, incapaces por esto

41. CRAMER (1750), *op. cit.*, §8.
42. CRAMER (1750), *op. cit.*, §9.
43. PADILLA (1756), *op. cit.*, III, §30.
44. EULER (1748), *op. cit.*, I, cap. I, §7.
45. EULER (1748), *op. cit.*, I, cap. I, §8.
46. EULER (1748), *op. cit.*, I, cap. I, §9.
47. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §6.

> de aumento, ò diminucion. *Se notaràn en adelante con las primeras letras* a, b, c, d, &c[48].

Esta dualidad variable/constante no era inusual en otros autores, como Wolff, L'Hospital o D'Alembert, dualidad que había sido abandonada por Euler[49]. En el caso de Padilla, de la definición de cantidad variable destaca la idea de cambio continuo, que aparece en el *Analyse des infiniment petits* de L'Hospital:

> Définition I. On appelle quantités variables celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent[50].

Reyneau utiliza la variante «sucesivamente», en lugar de «continuamente»[51]. De esta forma, según Schubring se evitaban posibles anomalías en el caso de límites[52]. Este tipo de definición contrasta con la de Cramer, para quien las cantidades variables son aquellas que tienen una infinidad de valores[53]. A estas dos definiciones Padilla añade un corolario, donde relaciona la idea de variable al movimiento (Figura 2), al introducir el concepto de «instante»:

> Las *abscisas* AP, y *aplicadas* PM *de una curva*, *son cantidades variables*, pues à cada instante puede ser mayores, ò menores, hasta que las abscisas degeneran en alguna parte determinada del eje, ò en todo èl, ya sea finito, ò infinito, segun que la curva vuelve en sì, ò sigue sin termino: en cuyos casos la abscisa, y aplicada degeneran en constantes[54].

De hecho, en el tratado V se ve más explícitamente la relación del movimiento con la definición de variable, en sintonía con su aproximación newtoniana del cálculo[55]:

> Que las cantidades que son capaces de aumento, ò diminucion, mediante el movimiento del punto, línea, ò superficie, que las produce, se signifiquen como cantidades variables…[56].

48. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §7.
49. Sobre el concepto de variable ver Bella, Sandra. *De la géométrie et du calcul des infiniment petits : les réceptions de l'algorithme leibnizien en France (1690-1706).* Tesis doctoral, 2018 [accesible en: http://www.theses.fr/2018NANT4044], pp. 350-352; y Schubring (2005, pp. 19-20).
50. L'Hospital, Guillaume F. A. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* Paris: Imprimerie Royale, 1696, p. 1.
51. Reyneau (1708), *op. cit.*, VIII, §282.
52. Schubring (2005), *op. cit.*, p. 20.
53. Cramer (1750), *op. cit.*, §6.
54. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §8.
55. Véase, por ejemplo, Blanco (2013), *op. cit.*, p. 779.
56. Padilla (1756), *op. cit.*, V, §22.

Finalmente, las definiciones VIII y IX hacen referencia a la clasificación de curvas según el grado (o dimensión) de la ecuación. Empieza definiendo la ecuación correspondiente a la línea recta o *línea de primer género*:

> DEFINICIÓN VIII. Si en una Equacion Algebrica, que expressa la relación de las abscisas à las aplicadas, se halla tanto la x, quanto la y en el primer grado, v. g. $ax = by$, se dirà la línea *XVM*, à quien pertenece *linea del primer genero*, que, como se verà, es una linea recta[57].

Esta definición parece acercarse a la idea de ecuación analítica, alejándose de la definición cartesiana de ecuación, en tanto que expresión de un mismo segmento mediante dos expresiones algebraicas diferentes[58].

Si la ecuación es de segundo grado las líneas son de segundo género (curvas del primer grado), y de forma similar para grados superiores:

> DEFINICIÓN IX. Si las dimensiones de la x, ò de la y suben al segundo grado, ù solamente ocurre el producto de la abscisa por la aplicada con las cantidades conocidas para formar la Equacion, la *linea* à quien corresponde se dice del *segundo genero*, ò bien *curva del primer grado*. V. g. $Ax^2 \pm Bxy \pm Cx^2 \pm Dx \pm Ey \pm F = 0$ [sic][59], suponiendo por las letras mayores qualesquiera coeficientes, y por los signos ambiguos qualquiera de ellos; y en esta forma se deben entender las lineas del tercer genero, ò curvas del segundo grado, como también las lineas del quarto orden, ò curvas del tercer grado, del quarto, del quinto, &c al infinito[60].

Aquí *género* equivale al grado de la ecuación, pero más adelante, en las secciones «De las lineas del primer orden» y «De las lineas de segundo orden, o curva del primer genero», Padilla pasa a usar *orden* en el sentido de grado de la ecuación y *género* para clasificar las curvas. Esta clasificación, orden de línea y género de curva, coincide con la que se expone en la *Encyclopédie*[61], que es también la nomenclatura utilizada por Newton tal como se indica en una nota del tratado de Cramer[62].

57. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §9.

58. Sobre el concepto de ecuación en Descartes, véase Pla y Viader (1999), *op. cit.*, pp. XXIX, XXXVIII-XXXIX.

59. Aquí hay un error que no aparece en la lista de erratas. La ecuación debería ser: $Ax^2 \pm Bxy \pm Cy^2 \pm Dx \pm Ey \pm F = 0$.

60. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §10.

61. D'Alembert y Diderot, *op. cit.*, artículos: COURBE, page 4: 382; GENRE, page 7: 594; ORDRE, page 11: 596.

62. Cramer (1750), *op. cit.*, p. 53. En referencia a *Enumeratio linearum tertii ordinis* de Newton, primer estudio y clasificación de las cúbicas planas, escrito alrededor de 1676 y publicado en 1704 como apéndice de la obra *Opticks*. Boyer, Carl B. *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica, 1956. Reeditado por Dover Publications, 2004, pp. 138 y ss.

En cambio, Wolff habla de curva de primer *género* cuando la ecuación tiene dimensión dos (sin hacer referencia a líneas)[63], mientras que Reyneau usa *género* indistintamente: línea de segundo género o curva de primer género[64]. La Tabla 1 muestra de manera esquemática la clasificación de curvas, donde he destacado en negrita las coincidencias detectadas.

TABLA 1. CLASIFICACIÓN DE LAS CURVAS, SEGÚN EL GRADO DE LA ECUACIÓN CORRESPONDIENTE

	Tipo de curva	Tipo de línea
REYNEAU	Curva de género *k-1*	Línea de género *k*
WOLFF	Curva de género *k-1*	
ENCYCLOPÉDIE	**Curva de género *k-1***	**Línea de orden *k***
CRAMER	**Curva de género *k-1***	**Línea de orden *k***
PADILLA	1. Def. IX: Curva de grado *k-1* **2. Curva de género *k-1***	1. Def. IX: Línea de género *k* **2. Línea de orden *k***

En esta primera parte ya se detectan, pues, otras posibles influencias, además de la sección segunda de los *Elementa Analyseos* de Wolff (en particular, los apartados §§367-385). Por ejemplo, la sección III del libro VIII del *Analyse démontrée* de Reyneau y algunos aspectos del tratado sobre curvas algebraicas de Cramer. Todas estas obras se encontraban en la Biblioteca de la Academia de Matemáticas de Guardias de Corps.

Padilla acaba la sección de definiciones con un escolio donde anuncia que «en quanto sea posible nos hemos de valer del Algebra para la explicación de este Tratado, como de medio mas facil, y conveniente»[65]. Para ello, es necesario explicar primero cómo se construyen geométricamente las ecuaciones, como veremos a continuación.

4. SOBRE LA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LAS ECUACIONES

El capítulo sobre la construcción geométrica de las ecuaciones presenta 17 problemas (proposiciones). Como introducción al capítulo enuncia las siguientes

63. WOLFF (1713), *op. cit.*, §382.
64. REYNEAU (1708), *op. cit.*, VIII, §354.
65. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §11.

suposiciones, similares a la primera y segunda *supposition ou demande* de la obra de Reyneau[66]:

> *Hypothesi*. Que cada letra del Alphabeto represente una linea, à menos de prevenirse en contrario otra cosa[67].
> *Corolario*. Asi a^2 serà el quadrado cuyo lado es = a, a^3 serà el cubo cuyo lado es = a, ab serà el rectángulo cuyos lados son a, b…[68].

En general, y aunque se trate siempre de «líneas», Padilla tiene tendencia a mantener este vínculo geométrico de las expresiones algebraicas que deja entrever en la segunda suposición.

Los problemas contenidos en este capítulo muestran ejemplos de cómo hallar geométricamente la suma y la resta, diversos radicales y la división, es decir, cómo construir las operaciones geométricamente, con rectas y circunferencias (con regla y compás). Los apartados §§14-18 se centran en la suma y resta de cantidades lineales enteras[69]. Veamos el caso de la resta[70], que resulta muy ilustrativo. Para hallar geométricamente la resta entre dos cantidades lineales enteras, sobre una recta indefinida se pasan las cantidades positivas de izquierda a derecha, y las negativas, al contrario, de derecha a izquierda, desde donde terminan las otras. El residuo será la resta. Por ejemplo, para hallar geométricamente $a + b - c - d$ (o sea, para restar $c + d$ de $a + b$) sobre la recta indefinida AB se toma $AD = a$, $DC = b$, y, por tanto, $AC = a + b$ (Figura 4). Ahora desde C hacia A (de derecha a izquierda) se toma $CO = c$, $ON = d$, es decir, $CN = c + d$. Por tanto, $AN = a + b - c - d$. Y aquí se consideran los dos casos, tanto si la cantidad que se resta es menor, como si es mayor. Una discusión similar sobre los signos en geometría aparece en la tercera suposición de Reyneau[71].

66. Reyneau (1708), *op. cit.*, VIII, §267 y §280, respectivamente.
67. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §12.
68. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §13.
69. La construcción geométrica de la suma y la resta no se encuentra en Descartes, aunque sí en el comentario de Rabuel, Claude. *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*. Lyon: Marcellin Duplain, 1730, p. 7. En Bos, Henk J. M. *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer, 2001, pp. 293-301 se presenta un análisis de la interpretación de Descartes de las operaciones algebraicas en geometría.
70. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §16.
71. Reyneau (1708), *op. cit.*, VIII, §281. La evolución del concepto de signo negativo en los trabajos de Reyneau es analizada con detalle en Schubring (2005), *op. cit.*, pp. 77-81. En cambio, en Wolff no encontramos discusión sobre la resta, ni sobre el signo negativo, en línea con lo que afirma Schubring (2005), *op. cit.*, p. 96.

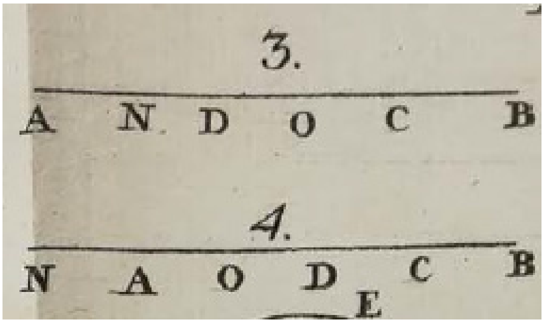


Figura 4. Lámina I, Figuras 3 y 4 del Tratado IV de Padilla (1756).

No se habla explícitamente de la construcción de la multiplicación de líneas, pero en apartados posteriores se estudian ejemplos relacionados con esta operación. Así, el apartado §19 presenta cómo hallar geométricamente el valor de cualquier radical cuadrado, y entero, constante de un solo término bajo el radical, por ejemplo $\sqrt{ab}$. Para resolver el problema, se busca la media proporcional entre *a* y *b*, que es $\sqrt{ab}$, que se construye de la siguiente manera (Figura 5). Se traza la recta indefinida *AD*, se toma *AB* = *a*, *BC* = *b*. Sobre *AC* se describe un semicírculo, y en el punto B se levanta una perpendicular *BO* a *AC* hasta la circunferencia. Entonces *BO* es $\sqrt{ab}$, por lo visto en el tratado de Geometría[72], donde a su vez hace referencia a la proposición 13 del libro VI de los *Elementos* de Euclides *(hallar la media proporcional a dos líneas rectas dadas)*. Vemos aquí que Padilla sigue la resolución de Wolff, si bien el problema inicial que este plantea es la construcción geométrica de la ecuación cuadrática $x^2 = ab$[73]. Al igual que Wolff, Padilla no se refiere explícitamente a *BC* como segmento «unidad», elemento clave en la construcción que Descartes desarrolla en *La Géométrie*[74]. Pudiera ser que Padilla, siguiendo a Wolff, entendiera *BC* como una unidad arbitraria, aun sin mencionarla explícitamente. En ese sentido, merece la pena comentar aquí la reflexión de Reyneau en relación a la unidad: si bien primero la identifica con 1, más adelante se refiere a una «unité arbitraire», que puede ser cualquiera de las líneas dadas, a la que todas las otras líneas hacen referencia[75], reflexión que también hallamos en el comentario de Rabuel[76].

72. PADILLA (1753), *op. cit.*, II, §238.
73. WOLFF (1713), *op. cit.*, §253.
74. Véase AUSEJO, Elena. «Las Matemáticas en el siglo XVII». Madrid: Ediciones Akal, 1992, pp. 11-14; y PLA y VIADER (1999), *op. cit.*, pp. XXXV-XXXVI y nota 4, p. 13.
75. REYNEAU (1708), *op. cit.*, VIII, §270 y §276.
76. RABUEL (1730), *op. cit.*, p. 12.

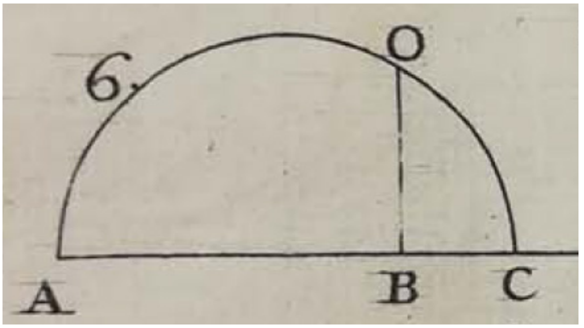


Figura 5. Lámina I, Figura 6 del Tratado IV de Padilla (1756).

A continuación, Padilla se ocupa de la construcción de diversos radicales, algunos de los cuales son en realidad variantes de ejemplos dados por otros autores. Por ejemplo, en el apartado §20 Padilla se propone hallar geométricamente el valor del radical cuadrado de $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, a partir de dos triángulos rectángulos, construyendo primero $\sqrt{a^2+b^2}$, ejemplo propuesto por Reyneau, L'Hospital o Wolff[77].

Al tratar la raíz cuadrada con términos positivos y negativos, $x=\sqrt{a^2-b^2}$, surge la cuestión del signo de la expresión bajo el radical. Al final de la construcción Padilla añade que supone a^2 mayor que b^2 «pues si este fuere mayor, entonces resultarà baxo el signo una cantidad negativa; por consiguiente una raíz imaginaria (47 Alg.) imposible en la naturaleza (39 Alg.) e imposible por esto de construirse»[78]. A la imposibilidad de construcción de un problema, en relación a las raíces imaginarias de la correspondiente ecuación, se refiere Descartes en *La Géométrie*[79], aspecto que, según Reyneau, pone de manifiesto la perfecta relación entre el análisis y la geometría[80]. Si bien la construcción de Padilla se asemeja a la de Wolff[81], este no hace ninguna alusión al signo de la expresión bajo el radical ni a la imposibilidad del problema.

Merece la pena estudiar un último ejemplo sobre la construcción de radicales. En el apartado §23 Padilla propone hallar geométricamente el valor de una expresión compuesta de un radical cuadrado y de otras cantidades lineales, como

77. L'Hospital, Guillaume F. A. *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant determinés qu'indeterminés*. Paris: chez Moutard, 1707, §379; Reyneau (1708), *op. cit.*, VIII, §292; Wolff (1713), *op. cit.*, §252, caso 8.
78. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §21.
79. Pla y Viader (1999), *op. cit.*, p. 21.
80. Reyneau (1708), *op. cit.*, VIII, §295.
81. Wolff (1713), *op. cit.*, §252, caso 9.

por ejemplo $\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2}\pm\frac{1}{2}a$, donde $AB=a, AC=\frac{1}{2}b$ perpendicular en *A*, $CM=\frac{1}{2}a$ el radio del círculo de centro *C* (Figura 6). Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo *ABC*, se puede construir $BC=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2}$, y sumándole $CM=\frac{1}{2}a$ se obtiene *BN*, y restándosela obtiene *BM*: $\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2}+\frac{1}{2}a$ y $\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2}-\frac{1}{2}a$, respectivamente.

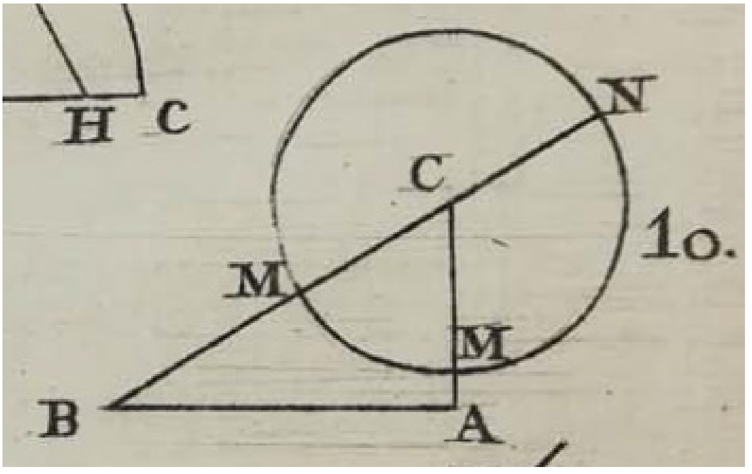


Figura 6. Lámina I, Figura 10 del Tratado IV de Padilla (1756).

Aunque Padilla no lo dice explícitamente, el problema propuesto está sin duda relacionado con las raíces de ecuaciones de segundo grado. Entre otras cosas porque la figura utilizada por Padilla es muy similar a la que aparece en el tratado de L'Hospital[82], que corresponde a la resolución de las ecuaciones de tipo $xx + ax - bb = 0$, $xx - ax - bb = 0$ (Figura 7), que a su vez se corresponde con la construcción de ecuaciones de segundo grado en *La Géométrie* de Descartes, como resolución de problemas planos[83]. Pero mientras que L'Hospital se refiere a las dos raíces, la *vraie* (positiva) y la *fausse* (negativa), Padilla solo considera la *vraie*. En el problema de Padilla, la expresión estaría relacionada con las raíces de las ecuaciones $z^2-az-\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2=0$ (en el caso positivo) y $z^2+az-\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2=0$ (en el caso negativo), que no coinciden con los ejemplos dados por otros autores, como Reyneau, Wolff o el mismo L'Hospital. Parece nuevamente un intento de ofrecer ejemplos nuevos, o variantes de otros ejemplos.

82. L'Hospital (1707), *op. cit.*, §380.
83. Véase Bos (2001), *op. cit.*, pp. 304-306.

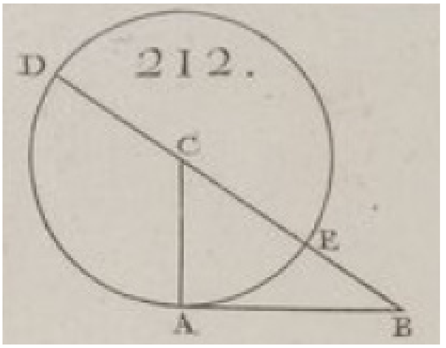


Figura 7. Plancha 23, Figura 212 de L'Hospital (1707).

A los problemas sobre radicales les siguen problemas que tratan sobre la construcción geométrica de fracciones lineales, en particular los tres siguientes, que involucran la multiplicación de líneas:

§24. *Proposición 8*: Se pide hallar geométricamente el valor de una fracción, cuyo numerador sea un cuadrado, por ejemplo, $\frac{b^2}{a}$. Padilla presenta la resolución de este problema a partir de la construcción geométrica de la tercera proporcional y triángulos semejantes, basada en la proposición 11 del libro VI de Euclides. Aunque Descartes no menciona explícitamente la tercera proporcional, sí lo hace Rabuel en su comentario[84].

§25. *Proposición 9*: En este caso, se trata de hallar geométricamente el valor de una fracción, cuyo numerador sea un rectángulo, como $\frac{ab}{c}$. Aquí Padilla utiliza la construcción geométrica de la cuarta proporcional, basada en la proposición 12 del libro VI de Euclides, de forma similar a Wolff y Reyneau[85], pero este último sí hace referencia explícita a la unidad, como se ha indicado más arriba.

§26. *Proposición 10*: Es una generalización del problema anterior. Se trata de hallar geométricamente el valor de cualquier fracción lineal, del tipo $\frac{abcd}{fgh}$, en que el numerador es cualquier producto La resolución está dividida en tres pasos. Primero considera $m = \frac{ab}{f}$, de manera que $\frac{abcd}{fgh} = \frac{mcd}{gh}$. A continuación considera $n = \frac{mc}{g}$, con lo cual: $\frac{mcd}{gh} = \frac{nd}{h}$. Finalmente, $\frac{nd}{h}$ es la cuarta proporcional de n, d y h, que es el valor de $\frac{abcd}{fgh}$. Se trata de un procedimiento muy similar al expuesto por

84. Rabuel (1730), *op. cit.*, p. 12.
85. Wolff (1713), *op. cit.*, §252, caso 1, y Reyneau (1708), *op. cit.*, VIII, §270 y §276.

L'Hospital[86]. Pero Padilla usa la Figura 8 para mostrar gráficamente la construcción de la solución. Siendo *NR* = m, sobre *N* se traza *NE*, sobre la que se toma *NF* = g; *FG* = c, se traza *RF* y por *G* se traza paralela *GH*, con lo cual *RH* = n. Y así hasta llegar a *HO*, que es el quebrado que se proponía construir $\frac{abcd}{fgh}$.

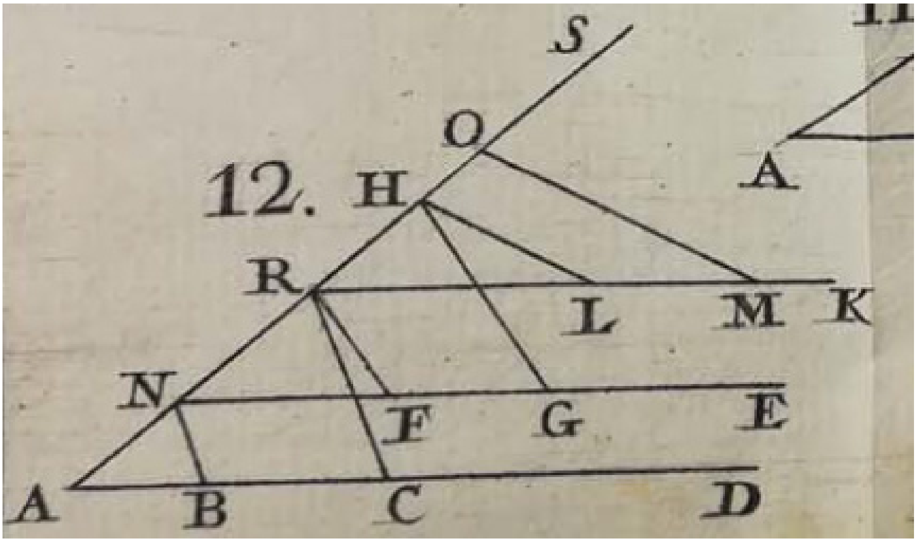


Figura 8. Lámina I, Figura 12 del Tratado IV de Padilla (1756).

Una vez presentados estos ejemplos, Padilla define *fracción lineal* de la siguiente manera:

> Suponiendo que en una fraccion cada letra represente una linea (§12), para que sea linear debe haver en el numerador una letra mas que en el denominador, caso de ser racional; y siendo radical quadrada debe haver dos mas en el numerador que en el denominador &c y si alguna vez no sucediere esto, se debe suponer el numerador, ò el denominador multiplicado por tantas veces la unidad, quantas baste à que se verifique lo dicho. Assi en $\frac{b}{c}$ para que $\frac{bcd}{e}$ sea linear se debe suponer, que b està multiplicado por la unidad: para que sea linear, se debe suponer e multiplicada por la unidad, cuyo valor debe constar, ò saberse[87].

86. L'Hospital (1707), *op. cit.*, §376. También aparece en Reyneau, quien, sin embargo, lo plantea más como una manera de «abreger l'expression des fractions dont le numerateur & le dénominateur contiennent le produit de plusieurs lettres», véase Reyneau (1708), *op. cit.*, VIII, §279. En Wolff (1713), *op. cit.*, §252, caso 2, se estudia una versión más simple del problema: $\frac{abc}{de}$.
87. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §30.

A mi entender es el único momento en todo el Tratado IV en el que Padilla se refiere explícitamente al uso de la unidad para preservar la homogeneidad. En este caso, las fracciones lineales (las racionales y las afectadas por radical) diríamos que tienen dimensión 1. Este concepto es similar al de *fracción simple* con el que L'Hospital abre el noveno libro, sobre la construcción de ecuaciones:

> Fractions simples, telles que $\frac{ab}{c}$, ou $\frac{abe}{cf}$, ou $\frac{abeh}{cfg}$ &c. […] Il est visible qu'en augmen-tant le nombre des proportions, autant qu'il sera nécessaire, on trouvera toujours une ligne droite égale à une fraction simple donnée, tel que puisse être le nombre des dimensions de son numérateur[88].

Los apartados finales de esta sección son esencialmente ejemplos de aplicación de las proposiciones anteriores. Entre ellos, cabe destacar que en el apartado §39 estudia la construcción de radical del octavo grado (Figura 9).

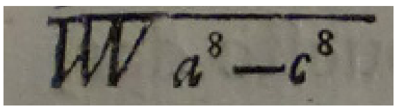


Figura 9. Radical del octavo grado en Padilla (1756, IV, §39).

De manera muy sucinta, para la resolución de este problema Padilla aplica diversas transformaciones, anidadas. Primero reescribe c^8 como $c^8 = a^4m^4$ (usando §31); luego, $m^4 = a^2n^2$, y así sucesivamente. Finalmente la expresión original queda reducida a una expresión del tipo $r = \sqrt{aq}$, que puede construir a partir del apartado §19. Este problema resulta interesante por las potencias utilizadas. Como indican Pla y Viader[89], antes de Descartes expresiones como a^4 o b^5 no tenían ningún sentido geométrico y, por tanto, ningún sentido. A partir de *La Géométrie* la situación cambia, todo son líneas o magnitudes. Y así vemos que en este problema Padilla trabaja con potencias octavas. En el escolio que cierra el capítulo, Padilla afirma que este procedimiento se puede generalizar para todos los grados pares. «Y estos son los casos de las Equaciones, que nos hemos propuesto dar, como suficientes para lo que necesitamos; pues lo demàs es asunto de mucha extensión»[90]. Con esto cierra el capítulo dedicado a la construcción geométrica de ecuaciones y da paso al estudio de las curvas.

88. L'Hospital (1707), *op. cit.*, §376.
89. Pla y Viader (1999), *op. cit.*, p. 15, nota 14.
90. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §40.

5. Sobre el estudio de las curvas

Después de presentar las líneas del primer orden o líneas rectas[91], Padilla se centra en las líneas de segundo orden o curvas del primer género: círculo (§§46-47), parábola (§§48-58), elipse (§§59-71) e hipérbola (§§72-91). Y es aquí donde la influencia de la obra de Wolff (en concreto, el capítulo VI) parece más evidente. Para ilustrar el tratamiento de las curvas en Padilla, veamos el caso de la parábola. Padilla parte de la definición de parábola a partir de la relación entre abscisas y aplicadas (tomado eje de abscisas vertical):

> DEFINICIÓN X: *Parabola* es una curva *AM*, en que el quadrado de la aplicada *MP* sobre el eje de abscisas *AP* es igual al rectangulo hecho de la correspondiente abscisa *AP* por una recta *AB* constante, llamada *parametro*[92].

Y en el siguiente apartado (corolario I) da la ecuación de la parábola, $y^2 = ax$, donde a es el parámetro, $x = AP$, $y = MP$. Es la ecuación expresada tomando eje de abscisas sobre el eje de la parábola y el vértice como punto de referencia. En general, su planteamiento coincide con el que presenta Wolff en el apartado §388. Aunque para expresar y de manera aislada, Padilla, a diferencia de Wolff, sí que considera el doble signo[93]: $y = \pm\sqrt{ax}$.

Esta introducción de la parábola difiere de la utilizada por L'Hospital. Este empieza definiendo la parábola a partir de su construcción con escuadra y regla, y un hilo que describe la parábola y a partir de aquí llega a la ecuación, que corresponde a un teorema[94]. Mientras que para Padilla y para Wolff la descripción de la parábola a partir de un movimiento continuo corresponde a un corolario al final de la sección dedicada a la parábola en ambos casos[95].

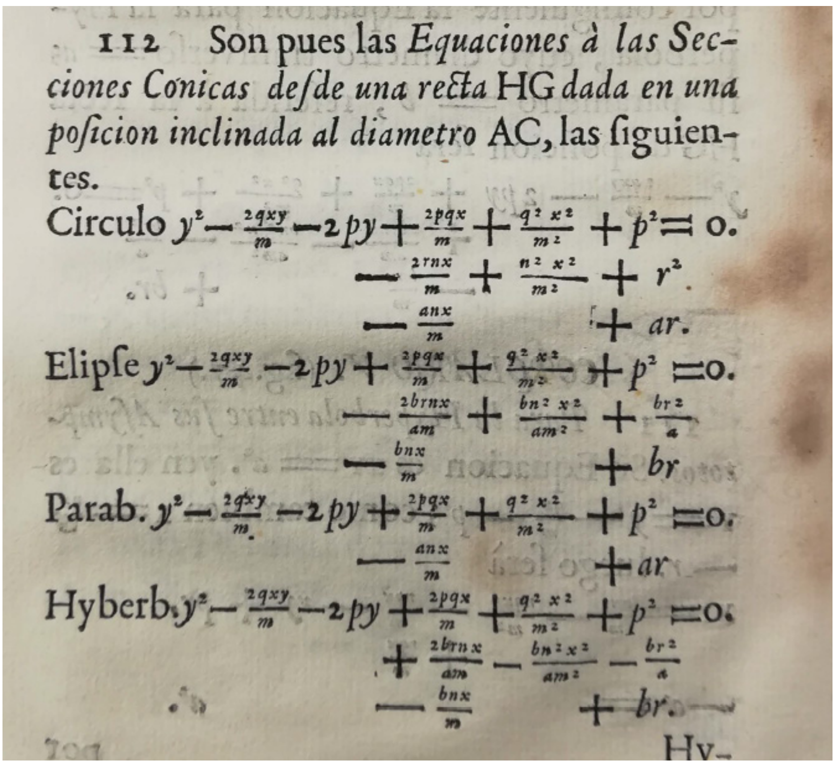
La parte dedicada a la parábola y sus propiedades coincide más o menos con la de Wolff hasta el apartado §402. A partir de aquí, Wolff define elementos como cuerda, tangente, subtangente, normal o subnormal, que no son considerados por Padilla en este tratado. El estudio de tangentes Padilla lo deja para el cálculo diferencial. Así, por ejemplo, en uno de los exámenes celebrados en 1752 antes mencionados se pide: «Harà aplicación del Cálculo de las diferencias, para determinar las tangentes de las curvas, especialmente en el Círculo, Parabola, è Hyperbola»[96].

En el caso de la elipse y la hipérbola sigue un esquema similar, cuya exposición se asemeja a la propuesta por Wolff. Es decir, empieza dando la ecuación

91. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §§41-45.
92. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §48.
93. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §51.
94. L'Hospital (1707), *op. cit.*, libro primero, Definición I y §6.
95. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §58; Wolff (1713), *op. cit.*, §401. En relación a la generación de curvas en Descartes por movimiento y por cuerdas se puede consultar Bos (2001), *op. cit.*, pp. 338-342 y 346-349, respectivamente.
96. *Conclusiones* (1752), *op. cit.*, p. 43.

como definición de la cónica. Y al final del espacio dedicado a cada curva, se presenta la descripción de las cónicas a partir de un movimiento continuo, mediante un hilo. Para L'Hospital, por el contrario, esta es la definición de la curva, y a partir de aquí deduce la ecuación.

Los apartados §§92-125 presentan las secciones cónicas en relación a las secciones o cortes que se hacen a un cono. Este doble tratamiento parece habitual, ya que así lo enfocan también otros autores, como Wolff y L'Hospital[97]. Así como en el capítulo anterior se habían dado las ecuaciones de las cónicas en relación a sus diámetros, los apartados §§104-111 exponen cómo hallar las ecuaciones de las secciones cónicas, en relación a una recta cualquiera, inclinada respecto al diámetro, a diferencia de Wolff, que parece limitarse a los casos de ecuaciones expresadas en relación a los diámetros de las cónicas. La Figura 10 muestra el resumen de la clasificación:


112 Son pues las *Equaciones à las Secciones Conicas deſde una recta* HG *dada en una poſicion inclinada al diametro* AC, las ſiguientes.

Circulo $y^2 - \frac{2qxy}{m} - 2py + \frac{2pqx}{m} + \frac{q^2x^2}{m^2} + p^2 = 0.$
$- \frac{2rnx}{m} + \frac{n^2x^2}{m^2} + r^2.$
$- \frac{anx}{m} + ar.$

Elipſe $y^2 - \frac{2qxy}{m} - 2py + \frac{2pqx}{m} + \frac{q^2x^2}{m^2} + p^2 = 0.$
$- \frac{2brnx}{am} + \frac{bn^2x^2}{am^2} + \frac{br^2}{a}$
$- \frac{bnx}{m} + br$

Parab. $y^2 - \frac{2qxy}{m} - 2py + \frac{2pqx}{m} + \frac{q^2x^2}{m^2} + p^2 = 0.$
$- \frac{anx}{m} + ar$

Hyberb. $y^2 - \frac{2qxy}{m} - 2py + \frac{2pqx}{m} + \frac{q^2x^2}{m^2} + p^2 = 0.$
$+ \frac{2brnx}{am} - \frac{bn^2x^2}{am^2} - \frac{br^2}{a}$
$- \frac{bnx}{m} + br.$

Hy-

Figura 10. Ecuaciones de las secciones cónicas en Padilla (1756, IV, §12).

97. WOLFF (1713), *op. cit.*, §§513 y ss., y L'HOSPITAL (1707), *op. cit.*, libro sexto.

Como toda ecuación de segundo grado corresponde a una sección cónica, Padilla enuncia nueve reglas para clasificar las cónicas a partir de sus ecuaciones (§§113-121). Por ejemplo:

> REGLA VII. Si los terminos y^2, x^2 tiene un mismo signo, y el quadrado de la mitad del coeficiente de xy fuere igual al coeficiente de x^2, corresponderà à una Parabola[98].

Y si falta el término xy pero hay término en y^2 y en x^2, la regla VIII establece que también corresponde a una parábola[99]. Padilla explica cómo determinar, a partir de la ecuación de segundo grado, la sección cónica a la que pertenece y construirla. Comparando la ecuación dada con la correspondiente a la curva, según el apartado §112, cotejando el primer término con el primero, el segundo con el segundo, etc., se podrán determinar los coeficientes. A partir de aquí se podrán hallar el diámetro, el parámetro, las cantidades constantes, y construir la curva, de manera similar a como lo presenta L'Hospital o Reyneau[100].

A otras curvas les dedica Padilla un capítulo muy corto (§§126-129), aunque solo trata con círculos de superiores géneros, o infinitos ($y^{m+n} = (a - x)^n x^m$), parábolas de superiores géneros ($a^n x^n = y^m$), elipses e hipérbolas de superiores géneros o infinitas ($ay^{m+n} = bx^m(a - x)^n$, $ay^{m+n} = bx^m(a + x)^n$). Por el contrario, Wolff o Reyneau, sí trabajan con otras curvas como la concoide, la cisoide, la cuadratriz, la espiral logarítmica o la cicloide[101]. Sin embargo, estas curvas son objeto de examen en las *Conclusiones* de 1752[102], hecho que prueba que en la Academia de Matemáticas sí se estudiaban otros tipos de curvas, aunque no fueran contenido del Tratado IV. Padilla intenta justificar la ausencia del estudio de estas curvas en el Tratado IV en el siguiente escolio:

> Sería cosa prolija el referir los varios nombres de curvas inventadas, como tambien explicar sus equaciones, y propiedades, que de ellas puedan derivarse: nos contentaremos con saber, que si se dà la Curva construida baxo ciertos supuestos, no será dificil, baxo los mismos, inferir la Equacion que la corresponda; y que si es dada la Equacion para que por ella se construya la Curva, tampoco serà dificil formar su figura, siguiendo en parte las reglas dadas, y otras que se iràn explicando, aunque de passo, pues como no es assunto de mayor utilidad, no se pone aquel cuidado que podria parecer correspondia en este Curso[103].

98. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §119.
99. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §120.
100. L'HOSPITAL (1707), *op. cit.*, libro séptimo, o REYNEAU (1708), *op. cit.*, VIII, §§426-440.
101. WOLFF (1713), *op. cit.*, §§535, 544, 552, 564, 569, 573; REYNEAU (1708), *op. cit.*, VIII, §§449, 450-453, 454-459, 460, 461.
102. *Conclusiones* (1752), *op. cit.*, p. 41.
103. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §129.

Al final del mismo escolio Padilla anuncia que en la siguiente sección, *De los problemas geométricos*, va a «tratar de perfeccionar el Tratado de la Geometria Elementar, assi como en el Algebra lo hicimos del de la Arithmetica Vulgar»[104].

6. De los problemas geométricos

El bloque dedicado a los problemas geométricos está dividido en diversos capítulos. Primero se presentan las reglas para obtener las ecuaciones para resolver los problemas. Y los apartados siguientes contienen ejemplos de aplicación de divisiones de una recta (§§136-149), de polígonos regulares y su inscripción en el círculo (§§150-162), de triángulos (§§163-174) y cuadriláteros (§§175-176) y, finalmente, sobre problemas sólidos (§§177-187).

Con cuatro reglas presenta Padilla, de forma estructurada y con ejemplos y figuras ilustrativas, el método de Descartes para obtener las ecuaciones para resolver los problemas[105]:

> *Regla I*: hay que suponer el problema ya resuelto, «suponiendo hecho lo mismo que se và à buscar»[106].
> *Regla II*: se da nombre a todas las líneas que sean necesarias, tanto las conocidas como las incógnitas, denominando «las unas con las primeras letras del Alphabeto, y las segundas con las ultimas»[107].
> *Regla III*: tratando por igual las cantidades conocidas y las incógnitas se llega a una ecuación, «que es en lo que consiste todo el Arte»[108]. Ecuación que hay que resolver y construir, según las reglas dadas.
> *Regla IV*: en los casos en los que la ecuación no se obtenga de forma, hay que recurrir a otros elementos, como líneas perpendiculares o paralelas, ángulos, círculos, «todo à fin de tener algun triangulo rectangulo, ò triangulo semejante à otro ya conocido, que son los dos recursos mas usuales en tales casos»[109], es decir, con la ayuda del teorema de Pitágoras y de proporciones[110].

Acaba la *Regla IV* con el siguiente comentario, que vuelve a poner de manifiesto la intención didáctica de Padilla (el énfasis, en negrita, es mío):

104. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §129.
105. Pla y Viader (1999), *op. cit.*, pp. xxxviii-xxxix y 17-19.
106. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §130.
107. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §131.
108. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §132. Aquí, tal como indican Pla y Viader (1999), *op. cit.*, nota 103, p. xxxv, se podría entender «arte» justamente en el sentido de «método».
109. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §133.
110. En la descripción del método de resolución de geometría L'Hospital (1707), *op. cit.*, §425, también se refiere explícitamente a triángulos rectángulos o semejantes como los recursos más habituales para identificar las líneas y llegar a la ecuación.

> Como esto es imposible de explicarlo con reglas, nos contentaremos de haverlo apuntado, dexandolo para los exemplares que se pondràn, y para **el exercicio, que es el mejor maestro de todo**[111].

Antes de acabar el capítulo, Padilla añade que, si se supone dada la figura, quiere decir que se conocen sus lados, ángulos, área y otros elementos. Pero si se supone dada de *magnitud* y *posición*, además de lo anterior hay que entender que «si se tiran qualesquiera líneas de un punto dado fuera à qualesquiera dados en la figura, son todas cosas conocidas, y sirva este scholio de definicion sobre la inteligencia de *datos de magnitud, y posicion en Geometria*»[112]. Este escolio parece insistir en la diferencia entre la geometría elemental (que se ocupa de la magnitud) y la geometría superior (que toma en cuenta no solo la magnitud, sino también la posición)[113].

Para ilustrar la aplicación de las reglas dadas, Padilla utiliza proposiciones que no se usaron en el tratado de Geometría, porque entonces no eran necesarias, pero que considera dignas de saberse[114]. Veamos uno de los problemas que estudia Padilla en el capítulo sobre las divisiones de una recta. Dicho capítulo se basa en algunas proposiciones del libro II de Euclides: los apartados §§136-141 se corresponden con las proposiciones 1-6 del libro II de Euclides, planteadas desde el punto de vista analítico, asignando «letras» a las rectas. Los apartados §§142-149 contienen tres problemas relacionados con la división de una recta en media y extrema razón, relacionadas con la proposición 30 del libro VI y con la 11 del libro II de Euclides[115]: Así, en la proposición 38 se plantea el siguiente problema[116]:

> Dada una recta *AB*, dividirla de suerte, que el rectangulo hecho de la toda por la parte menor sea igual al quadrado del mayor segmento[117].

Padilla primero expone la *resolución* del problema. Supóngase ya dividida la recta en *C*, como se pide (Figura 11). Asigna letras a las diferentes líneas:

$AB = a$, $AC = x$ (el segmento mayor), $CB = a\text{-}x$ (el segmento menor)

Por la condición del problema llega a la ecuación $a^2 = x^2 + ax$, cuyas raíces son $\pm\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$, una positiva y otra negativa (Figura 12).

111. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §133.
112. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §134.
113. Se puede entender aquí posición como «situación», tal como la había definido RABUEL (1730), *op. cit.*, p. 23.
114. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §135.
115. Las cuestiones XXIII-XXV de las *Conclusiones* (1752) están relacionadas con media y extrema razón.
116. Padilla trata este mismo problema en su tratado sobre álgebra, pero en lugar de dividir una recta en dos partes, hay que dividir un número en dos partes. Véase PADILLA (1756), *op. cit.*, III, §191.
117. PADILLA (1756), *op. cit.*, IV, §142.

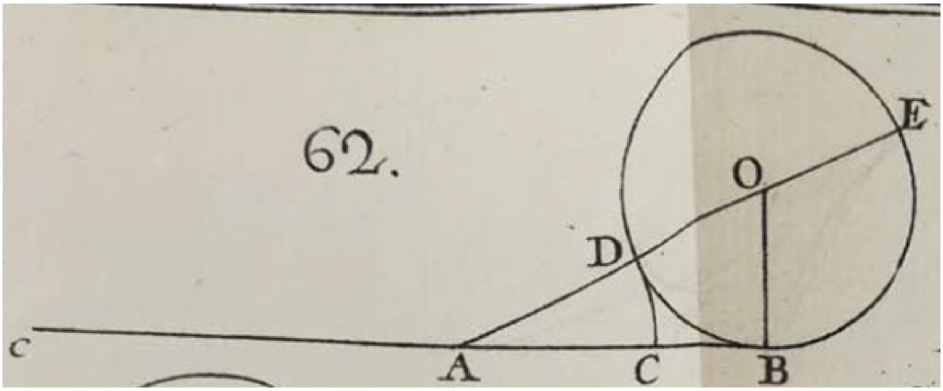
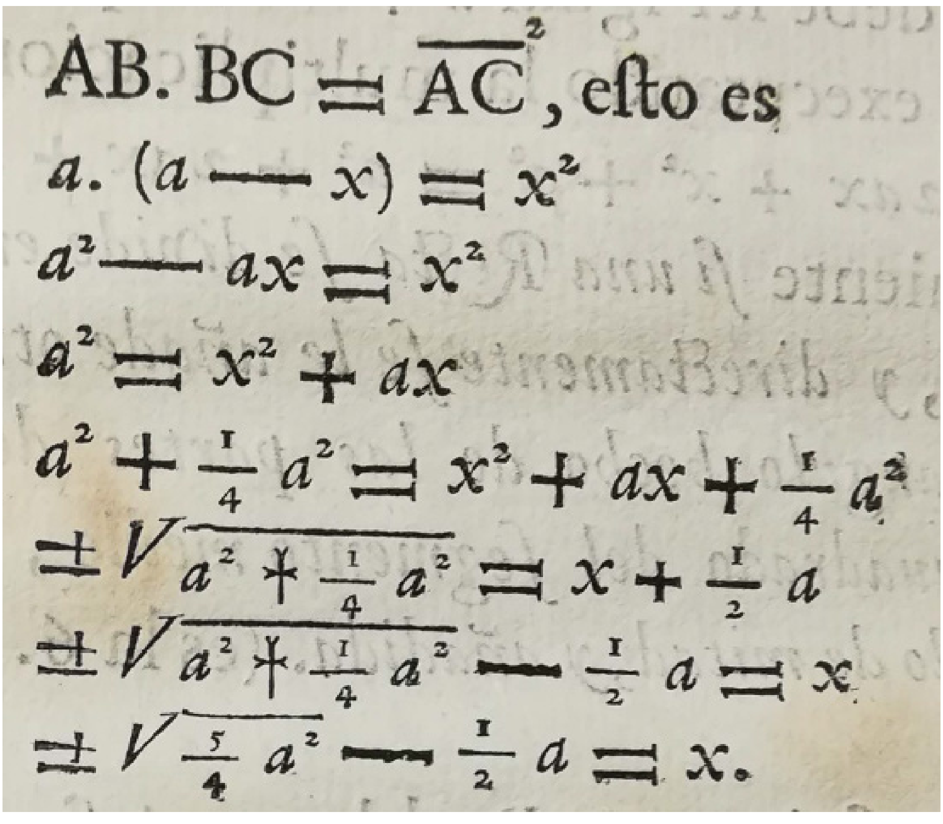


Figura 11. Lámina V, Figura 62 del Tratado IV de Padilla (1756).



$AB.\, BC = \overline{AC}^2$, eſto es

$a.\,(a - x) = x^2$

$a^2 - ax = x^2$

$a^2 = x^2 + ax$

$a^2 + \frac{1}{4}a^2 = x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$

$\pm\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = x + \frac{1}{2}a$

$\pm\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = x$

$\pm\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = x.$

Figura 12. Proposición 38 de Padilla (1756, IV, §142).

Una vez resuelta la ecuación procede la *construcción* de sus raíces. Construye primero la raíz positiva, $x=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{1}{2}a=AD$, tal como ha hecho en el apartado §23. Pasa *AD* desde *A* hasta *C*, y así queda determinado el punto *C* en sentido positivo, siendo el segmento mayor. A partir de aquí ya se tiene el segmento menor: $a-x=\frac{3}{2}a-\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

Para construir la raíz negativa, $-\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$, se prolonga *AO* hasta cortar la circunferencia en *E*, con lo cual $AE=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}+\frac{1}{2}a$ (es decir, vuelve a aplicar §23). Desde *A* traza arco de radio *AE* para pasar *AC* desde *A* hasta *c* en la prolongación de *BA* hacia la izquierda, y así se tiene $Ac=-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Vale la pena mencionar aquí que ni Wolff ni Reyneau discuten este caso en sus respectivas resoluciones del problema[118].

Mientras la raíz positiva resuelve el problema propuesto[119], la raíz negativa en *Ac* resuelve este otro problema:

> Dada una recta *AB*, como menor segmento de una recta dividida en media y extrema razon, hallar el mayor *Ac*[120].

Este segundo problema correspondería a, dado un segmento, cómo añadirle otro de manera que el segmento total quede dividido en media y extrema razón. El tratamiento de Padilla es muy similar al Problema VIII de Rabuel[121], parte de una serie de problemas relacionado con alguna imposibilidad. Incluso la figura propuesta por Padilla coincide con la de Rabuel (Figura 13).

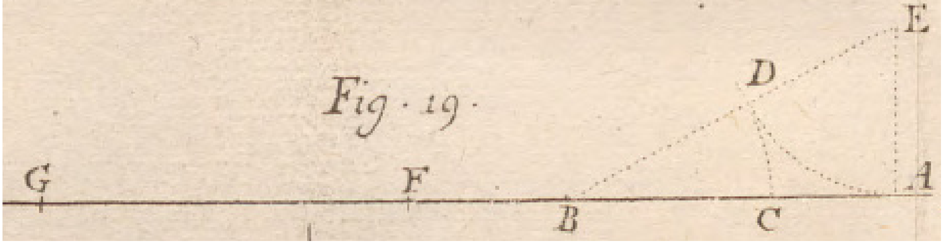


Figura 13. Plancha 1, Figura 19 de Rabuel (1730).

Tras el capítulo sobre divisiones de una recta, se estudian la inscripción de polígonos regulares en un círculo y problemas sobre triángulos y rectángulos. En

118. Véase Wolff (1713), *op. cit.*, §258, y Reyneau (1708), *op. cit.*, VIII, §297.
119. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §144.
120. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §145.
121. Rabuel (1730), *op. cit.*, pp. 33-35.

estos capítulos se tratan «figuras que se pueden tener geometricamente por el circulo, y linea recta»[122]. Padilla deja para el último capítulo el estudio de situaciones no construibles con regla y compás, que analizaremos a continuación. Este último capítulo del Tratado IV se centra en el estudio de problemas sólidos, en particular, la construcción de dos medias proporcionales y la trisección de un ángulo[123]. Se trata de la construcción mediante cónicas de soluciones de ecuaciones cúbicas, asunto claramente relacionado con la tercera parte del tercer libro de *La Géométrie* de Descartes, *De la construcción de los problemas sólidos, o más que sólidos* (es decir, de dimensión 3 o superior)[124].

En la sección «La invención de dos medias proporcionales» del Libro III, Descartes resuelve un problema clásico, de forma algebraica: la duplicación del cubo. Es decir, se trata de hallar el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado. El problema era saber si se podía construir una solución con el uso exclusivo de la regla y el compás[125]. El problema equivale a hallar dos medias proporcionales y se resuelve a partir de una cúbica, que es resoluble por el método que ha expuesto Descartes, en particular, a partir de la intersección de una circunferencia y una parábola. Y justamente este es el problema con el que Padilla abre el último capítulo:

> Entre dos lineas dadas *AB*, *CD*, hallar dos medias proporcionales, de suerte que las quatro sean continuas[126].

Uno de los casos particulares de este problema es, justamente, la duplicación del cubo:

> Para duplicar un cubo se hallaràn dos medias continuas proporcionales entre el lado *AB* del cubo dado, y otra recta doble *CD*[127].

Empieza la resolución del problema asignando letras a las líneas del enunciado (Figura 14):

$$AB = a \text{ la menor, } CD = b \text{ la mayor, } y = \text{la media mayor, } x = \text{la media menor}$$

122. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §162, p. 117.
123. Véase Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §§177-185 y §186, respectivamente.
124. En Bos (2001), *op. cit.*, pp. 375-381, hay un excelente análisis sobre la resolución de estos dos problemas en *La Géométrie* de Descartes.
125. Sobre la duplicación del cubo véase Pla y Viader (1999), *op. cit.*, p. 130, nota 99, y Boyer (1956), *op. cit.*, pp. 12-13 y 17-18.
126. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §177.
127. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §180.

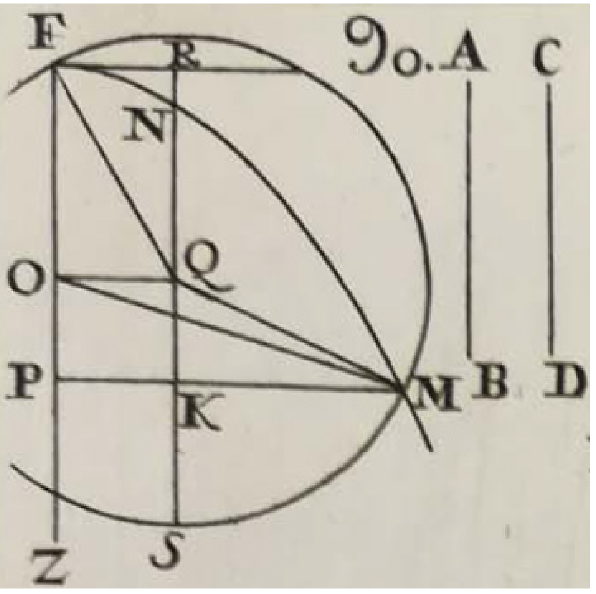


Figura 14. Lámina VII, Figura 90 del Tratado IV de Padilla (1756).

Y por la condición del problema se obtienen las siguientes proporciones:

$$a:x = x:y$$
$$x:y = y:b$$
$$a:x = y:b$$

De la primera proporción resulta la parábola: $ay = x^2$ (I); de la segunda, la parábola $bx = y^2$ (II); y de la tercera, la hipérbola entre sus asíntotas $ab = xy$ (III). Sumando las ecuaciones (I) y (II), se obtiene el círculo:

$$y^2 + x^2 - bx - ay = 0 \text{ (IV)}$$

y restándolas, la hipérbola equilátera:

$$y^2 - bx - x^2 + by = 0 \text{ (V)}$$

A partir de la ecuación (I) obtiene $\frac{cx^2}{d} = \frac{acy}{d}$ que, combinando con la ecuación (II), produce las dos ecuaciones siguientes:

$$\text{Hipérbola escalena: } y^2 - \frac{cx^2}{d} + \frac{acy}{d} - bx = 0 \text{ (VI)}$$

$$\text{Elipse: } y^2 + \frac{cx^2}{d} - \frac{acy}{d} - bx = 0 \text{ (VII)}$$

Finalmente, las medias buscadas se pueden hallar como intersección de dos de las curvas dadas:

> Si se convinan qualesquiera dos de estas Equaciones, y se construyen las Curvas que representan, sus comunes intersecciones determinaràn las dos medias que se buscan[128].

Hasta aquí la resolución es prácticamente idéntica a la de Wolff[129], incluyendo las ecuaciones (I)-(VII). Pero mientras que Wolff selecciona las combinaciones círculo-parábola, círculo-elipse, círculo-hipérbola, y dos parábolas, Padilla escoge únicamente las combinaciones círculo-parábola[130] y dos parábolas[131], y construye los puntos de intersección de las curvas en cada caso. La combinación de dos parábolas resulta, según Padilla, «muy breve y elegante», opinión que coincide con la de Rabuel: «Une des manieres les plus simples, se fait avec deux paraboles»[132] y en línea, a su vez, con la introducción del tercer libro de *La Géométrie*[133]. En el problema de la trisección de un ángulo volvemos a ver que, aunque el tratamiento general es similar al que plantea Wolff en el apartado §629, este estudia la combinación círculo-hipérbola equilátera, mientras que Padilla se decanta nuevamente por el círculo y la parábola:

> De las Secciones Conicas no hay otras mas faciles de describirse, que el Circulo, y Parabola, y por esto en todas las construcciones nos hemos servido de estas dos curvas para la solucion de los problemas, omitiendo los demàs modos que solo son curiosidad, y nos ocuparia el tiempo, ya que lo vamos aprovechando en tocar à lo menos especies que dèn motivo, si en adelante si quiere, de averiguarlas mas despacio[134].

La resolución y construcción del problema de hallar dos medias proporcionales se complementa con dos escolios. En el primero explica que si mientras que los problemas planos se construyen con una media proporcional, y se pueden resolver por el círculo y la línea recta, por su parte los problemas sólidos se consiguen a partir de dos medias proporcionales y se construyen a partir de la intersección de dos secciones cónicas[135]. Y en el segundo escolio es donde define qué es un problema sólido, y donde establece la ecuación resultante de las cuatro proporcionales continuas:

128. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §177.
129. Wolff (1713), *op. cit.*, §624.
130. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §178.
131. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §179.
132. Rabuel (1730), *op. cit.*, p. 532.
133. Pla y Viader (1999), *op. cit.*, p. 100.
134. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §187.
135. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §183.

> Que este sea un Problema Sólido, ò del tercer grado, se manifiesta en que suponiendo a la primera extrema; x la primera de las medias, seràn las quatro proporcio-nales $a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}$: si la ultima $\frac{x^3}{a^2}$ la suponemos $=b$, se tendrà esta Equacion $\frac{x^3}{a^2} = b$. De que resulta $x^3 = a^2b$ ù $x^3 - a^2b = 0$ que es una Equacion del tercer grado determinada. Assi se cansan en vano los que intentan resolver este problema por el Circulo, y Linea recta, siendo èl por su naturaleza superior, segun se vè[136].

Se trata, por tanto, de la ecuación cúbica que establece Descartes para resolver el problema, y que construye geométricamente a partir de la intersección de un círculo y una parábola[137].

Para finalizar esta sección, los problemas sólidos son también objeto de examen, tal como ponen de manifiesto las conclusiones XV y XVI defendidas en el Cuartel de Guardias de Corps en 1752[138]. Nuevamente vemos que este tipo de problema ya se estudiaba en la Academia de Matemáticas antes de la publicación del *Curso* de Padilla.

7. Reflexiones finales

Este estudio preliminar del Tratado IV del *Curso* de Padilla pone de manifiesto las posibles fuentes utilizadas en su elaboración. Si bien es cierto que este tratado coincide en gran medida con la primera parte, sección segunda, de los *Elementa Analyseos* de Wolff (1713), Padilla difiere de Wolff en ciertos aspectos fundamentales, como en la clasificación de las matemáticas, en la consideración de cantidades negativas o en el tratamiento de los problemas sólidos. Se han hallado puntos en común con otras obras de referencia, como L'Hospital (1707), Reyneau (1708), Rabuel (1730) o Cramer (1750), a nivel de clasificación de curvas, construcción de cantidades negativas o tratamiento de algunos problemas geométricos, entre otros. Por otro lado, según se ha visto, el Tratado IV fue elaborado según criterios formativos, como el resto del *Curso*. Sin lugar a dudas, se aprecian en Padilla ideas propias e innovadoras sobre la enseñanza de la «geometría superior», tanto a nivel metodológico como a nivel conceptual. Por todo ello, el Tratado IV de Padilla puede ser considerado como el primer manual impreso en España dedicado íntegramente a la enseñanza de la geometría analítica.

136. Padilla (1756), *op. cit.*, IV, §184.

137. La relación de este problema con la resolución de una cúbica ya había sido establecida por Rafael Bombelli (1526-1572) y François Viète (1540-1603). Ver Pla y Viader (1999), *op. cit.*, nota 101, p. 132.

138. *Conclusiones* (1752), *op. cit.*, pp. 36-37.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha contado con el apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación HAR2016-75871-R y PID2020-113702RB-I00.

BIBLIOGRAFÍA

AUSEJO, Elena. *Las Matemáticas en el siglo XVII*. Colección AKAL Historia de la Ciencia y de la Técnica, vol. 17. Madrid: Ediciones Akal, 1992.

AUSEJO, Elena y MEDRANO-SÁNCHEZ, Francisco J. «Construyendo la modernidad: nuevos datos y enfoques sobre la introducción del cálculo infinitesimal en España (1717-1787)». *Llull*, 2010, 33 (71), pp. 25-56. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3353401.pdf

BELLA, Sandra. *De la géométrie et du calcul des infiniment petits : les réceptions de l'algorithme leibnizien en France (1690-1706)*. Tesis doctoral, 2018 [accesible en: http://www.theses.fr/2018NANT4044].

BLANCO, Mónica. «The Mathematical Courses of Pedro Padilla and Étienne Bézout: Teaching Calculus in Eighteenth-Century Spain and France». *Science & Education*, 2013, 22 (4), pp. 769-788.

BLANCO, Mónica y MASSA-ESTEVE, Maria Rosa. «La matemática pura en los cursos militares de matemáticas de Pedro Lucuce (1739-44) y de Pedro Padilla (1753-56)». En RUIZ-BERDÚN, D. (ed.). *Ciencia y técnica en la universidad: trabajos de historia de las ciencias y de las técnicas*. Alcalá de Henares: Universidad de Alcalá, 2018, vol. II, pp. 167-178.

BLANCO, Mónica y PUIG-PLA, Carles. «The role of mathematics in Spanish military education in the 1750's: Two transient cases». *Philosophia Scientiæ*, 2020, 24-1 (1), pp. 97-113.

BOS, Henk J. M. *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer, 2001.

BOYER, Carl B. *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica, 1956. Reeditado por Dover Publications, 2004.

CAPEL, Horacio; SÁNCHEZ, Joan Eugeni y MONCADA, Omar. *De Palas a Minerva. La formación científica y la estructura institucional de los ingenieros militares en el siglo XVIII*. Barcelona: CSIC, Ediciones El Serbal, 1988.

Conclusiones Mathematicas, sobre los tratados de Arithmetica, Geometrìa Elementàr, Trigonometrìa, Geometrìa Práctica, Algebra, Geometrìa Sublime, y Calculos Diferencial, è Integràl. Defendidas en el Quartel de Guardias de Corps de Madrid. Madrid: Antonio Marín, 1752 (AGS Guerra Moderna, 3778).

CRAMER, Gabriel. *Introduction à l'analyse de lignes courbes algébriques*. Genève: chez les frères Cramer et C. Philibert, 1750.

CUESTA DUTARI, Norberto. *Historia de la invención del anàlisis infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca, 1985.

D'ALEMBERT, Jean le R. y DIDEROT, Denis. *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres*, 1751–. University of Chicago: ARTFL Encyclopédie Project (Spring 2011 Edition). Robert Morrissey (ed.). http://encyclopedie.uchicago.edu/.

DORCE, Carles. *Historia de las matemáticas en España. II: De los Novatores al siglo XX*. Sant Cugat: Arpegio, 2017.

DOU, Albert. *Las Matemáticas en la España de los Austrias*. Universitat Autònoma de Barcelona, 1990.

EULER, Leonhard. *Introductio in analysin infinitorum*. Lausanne, 1748, en dos volúmenes. Traducción inglesa de J. D. Blanton, *Introduction to Analysis of the Infinite*. New York: Springer, 1988.

HIDALGO, Encarna. «El Aula de Matemáticas de los Guardias de Corps (1750-1761)». En VALERA, M. y LÓPEZ FERNÁNDEZ, C. (eds.). *Actas del V Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, vol. II. Murcia: DM-PPU, 1991.

JOFFREDO, Thierry. *Approches biographiques de l'*Introduction à l'analyse de lignes courbes algébriques *de Gabriel Cramer*. Tesis doctoral, 2017 [accesible en: http://www.theses.fr/2017LORR0255].

LAFUENTE, Antonio y PESET, José Luis. «Las Academias Militares y la inversión en ciencia en la España ilustrada (1750-1760)». *Dynamis*, 1982, 2, pp. 193-209.

L'HOSPITAL, Guillaume F. A. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: Imprimerie Royale, 1696.

L'HOSPITAL, Guillaume F. A. *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminés qu'indeterminés*. Paris: chez Moutard, 1707.

MASSA-ESTEVE, Maria Rosa. «La Reial Acadèmia de Matemàtiques de Barcelona. Matemàtiques per a enginyers». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 2014, XIV, pp. 17-34.

MASSA-ESTEVE, Maria Rosa; ROCA-ROSELL, Antoni y PUIG-PLA, Carles. «Mixed mathematics in engineering education in Spain: Pedro Lucucés course at the Barcelona Royal Military Academy of Mathematics in the eighteenth century». *Engineering Studies*, 2011, 3 (3), pp. 233-253.

MARONNE, Sébastien. «Les Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes (1730) de Claude Rabuel». En CRÉPEL, P. y SCHMIT, C. (eds.). *Autour de Descartes et Newton. Le paysage scientifique lyonnais dans le premier XVIIIe siècle*. Paris: Hermann, 2017, pp. 111-161 y 349-355 (Anexo).

MUÑOZ CORBALÁN, Juan Miguel. *L'Acadèmia de Matemàtiques. El llegat dels Enginyers Militars*. Barcelona: Secretaría General Técnica del Ministerio de Defensa, 2004.

NAVARRO BROTONS, Víctor. «Descartes y la introducción en España de la ciencia moderna». En *La filosofía de Descartes y la fundación del pensamiento moderno*. Sociedad Castellano-Leonesa de Filosofía, 1997, pp. 225-252.

PADILLA, Pedro. *Curso Militar de Mathematicas, sobre partes de esta ciencia, para uso de la Real Academia establecida en el Cuartel de Guardias de Corps*. Madrid: Antonio Marín, 1753-1756.

PLA, Josep y VIADER, Pelegrí. *René Descartes. La geometria*. Introducción, traducción y notas de Pla y Viader. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans/Pòrtic/Eumo, 1999.

PORTUGUES, Joseph Antonio. *Colección General de las Ordenanzas Militares, sus Innovaciones, y Aditamentos, dispuesta en diez tomos y con separación de clases*, vols. V-VI. Madrid: Imprenta de Antonio Marín, 1765.

RABUEL, Claude. *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*. Lyon: Marcellin Duplain, 1730.

REYNEAU, Charles. *Analyse démontrée ou la méthode pour résoudre les problêmes Mathématiques*. Paris: Quillau Imprimeur, 1708.

RIERA, Joan. «L'Acadèmia de Matemàtiques a la Barcelona Il·lustrada (1715-1800)». En *Actes del II Congrés Internacional d'Història de Medicina Catalana*. Barcelona, 1975, pp. 73-128.

SÁNCHEZ-BLANCO PARODY, Francisco. *Europa y el pensamiento español del siglo XVIII*. Madrid: Alianza Editorial, 1991.

SCHUBRING, Gert. *Conflicts between generalization, rigor, and intuition*. New York: Springer, 2005.

WOLFF, Christian. *Elementa Matheseos Universae*. Tomus Primus. .Halle, 1713. Editio nova. Genève: Marcum Michaelem Bousquet & Socios, 1732.