ISSN: 1576-7914 - e-ISSN: 2341-1902
DOI: https://dx.doi.org/10.14201/cuadieci20212289131

UN CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN LA ACADEMIA DE ARTILLERÍA DE SEGOVIA: EL CUADERNO ESCRITO POR EL CADETE MARTÍN GARCÍA LOYGORRI AL DICTADO DEL PROFESOR ISIDORO GÓMEZ (1775-1776)

A Course on Differential and Integral Calculus at the Academy of Artillery in Segovia: Cadet Martín García Loygorri's notebook taking dictation from Professor Isidoro Gómez (1775-1776)

M.ª Ángeles VELAMAZÁN GIMENO
Universidad de Zaragoza
mavelama@unizar.es

Fecha de recepción: 02/10/2020
Fecha de aceptación definitiva: 10/06/2021

RESUMEN: En la segunda mitad del siglo XVIII los Borbones emprendieron la modernización de la artillería española renovando su oficialidad con jóvenes de la nobleza y creando un centro de formación de alto nivel, tanto en el ámbito científico como militar. Así, en 1764 se abrió el Real Colegio de Artillería de Segovia con un plan de estudios cuyo aspecto más renovador en el ámbito de las matemáticas fue la incorporación del cálculo diferencial e integral. Hasta el momento, el tercer tomo del *Curso Matemático* del profesor Pedro Giannini (1795) era la principal prueba documental del desarrollo y extensión de los distintos temas que comprendía la asignatura. Este artículo analiza el alcance y contenido de un manuscrito inédito, hasta ahora inexplorado, veinte años anterior: el curso de *Cálculo Integral y Diferencial* dictado por el profesor Isidoro Gómez entre el 5 diciembre de 1775 y el 12 de abril de 1776, escrito por el cadete Martín García Loygorri.

Palabras clave: cálculo diferencial e integral; España, siglo XVIII; Artillería; Martín García Loygorri (1759-1824); Isidoro Gómez; Cipriano Vimercati (1736-1800).

ABSTRACT: In the second half of the 18th century, the Bourbons undertook the modernization of Spanish artillery, by recruiting young noblemen as officers and founding a high-level scientific and military training center. Thus, in 1764 the Royal College of Artillery of Segovia opened with a syllabus including differential and integral calculus as its most innovative aspect in the field of mathematics. Hitherto, the main documentary evidence of the teaching of this subject matter was the third volume of Professor Pedro Giannini's Mathematical Course (1795). This article analyzes the scope and content of an unpublished, until now unexplored manuscript that is dated twenty years earlier: the course on Integral and Differential Calculus dictated by Professor Isidoro Gómez between December 5, 1775 and April 12, 1776 and written down by Cadet Martín Garcia Loygorri.

Key words: differential and integral calculus; Spain; 18th Century; Artillery; Martín García Loygorri (1759-1824); Isidoro Gómez; Cipriano Vimercati (1736-1800).

1. El Colegio de Artillería de Segovia: creación y primeros años de funcionamiento (1764-1776)

El Real Colegio de Artillería de Segovia[1] empezó su funcionamiento en 1764, en el reinado de Carlos III (1716-1788) y responde a la necesidad de elevación científica y rehabilitación del concepto de militar español que se llevó a cabo durante el periodo de la Ilustración. Carlos III hizo venir desde Italia a Félix Gazola (1698-1780)[2] para encargarle expresamente la creación y funcionamiento del Colegio. Gazola, con la ayuda del ministro de origen italiano marqués de Esquilache (1699-1785), fue poco a poco perfilando sus objetivos para hacer del Colegio uno de los más importantes centros de formación científica de la España del XVIII.

El lugar elegido para su ubicación fue el Alcázar de Segovia. Entre las condiciones de admisión de alumnos figuraba la presentación de pruebas de nobleza o hidalguía. Con ello se pretendía dignificar el desprestigiado concepto que se tenía

1. Para más información sobre este centro, ver: Herrero Fernández-Quesada, María Dolores. *El Real Colegio de Artillería de Segovia*. Segovia: Academia de Artillería de Segovia, 1990.

2. En 1759 se iniciaba en España el reinado de Carlos III, quien por su anterior experiencia como rey de Nápoles y Sicilia consideraba la artillería de gran importancia en un ejército eficiente. Por ello designó en 1761 al italiano Félix Gazola –militar eficaz y hombre ilustrado que había servido en Italia a sus órdenes– para reformar la artillería española. El 2 de agosto de ese mismo año Gazola fue nombrado teniente general de los Reales Ejércitos y, poco después, inspector general de Artillería.

del militar español heredado de la época de los Austrias. La edad de admisión se fijó entre los doce y los dieciocho años[3].

El 16 de mayo de 1764 fue inaugurado el *Real Colegio Militar de Caballeros Cadetes de Artillería*, siendo su director el conde Félix Gazola; primer profesor, el sacerdote jesuita Antonio Eximeno Pujades (1729-1809); segundo profesor, Lorenzo Lasso de la Vega, capitán de Artillería, y tercer profesor, Jorge Juan Guillelmi de Andrada (1734-1809), capitán del Cuerpo. El Colegio se inició con setenta cadetes viviendo en el Alcázar en régimen de internado.

Cuatro años más tarde, el 23 de agosto de 1768, se publicó la Ordenanza[4] para su funcionamiento. Ahora la edad máxima de ingreso sería de quince años no cumplidos, en lugar de los dieciocho anteriormente propuestos. En lo relativo a la enseñanza, no se determina la duración del plan de estudios ni la distribución concreta de las materias en los cursos correspondientes, pero sí los contenidos principales que debían impartirse y el importante cometido del primer profesor:

> Será la principal obligación del primer Profesor instruir á los Caballeros Cadetes en las ciencias convenientes al desempeño de mi Real Servicio; para cuyo logro deberá poner su mayor esmero en arreglar y trabajar los tratados que se deban dictar y explicar en todas las clases de la Academia. Estos Tratados deberán ser los conducentes al primer instituto de la Academia, que consiste en criar buenos Oficiales de Artillería: y por esta razón serán los principales el Cálculo, Geometría, Mecánica, Hydráulica (sic), Hydrostática (sic), Fortificación y Artillería[5].

De esta forma la responsabilidad en el contenido de las distintas materias que se impartían en el Colegio recaía en el primer profesor. Sobre los demás profesores se articula que «procederán en todo de acuerdo con el primero, á fin que el método y série (sic) de estudios proceda de unos mismos principios»[6]. Como se observa, y ante la falta de libros de texto, la Ordenanza ya manifestaba el procedimiento del dictado de los tratados a los alumnos.

Algunos historiadores del Colegio de Artillería han localizado información sobre la posible duración y distribución de las materias del plan de estudios desde el inicio de su funcionamiento. Así, Pérez Ruiz[7] expresa:

> En el manuscrito de don Adolfo Carrasco, conservado en la academia de Artillería, figura un detallado plan de estudios, que al parecer se daba en el Colegio

3. Sobre las condiciones de ingreso, ver PÉREZ RUIZ, Pedro Antonio. *Biografía del Colegio-Academia de Artillería de Segovia*. Segovia: Imprenta de «El Adelantado», 1960, pp. 92-93.

4. Ordenanza de S.M. para el Real Colegio Militar de Caballeros Cadetes de Segovia, 1798. Según PÉREZ RUIZ (1960), *op. cit*., p. 106, esta Ordenanza es una reimpresión de la realizada en 1768.

5. Título V, artículo 2 de la Ordenanza (1798), *op. cit*., p. 50.

6. Título V, artículo 12 de la Ordenanza (1798), *op. cit*., p. 57.

7. El manuscrito al que se refiere es CARRASCO Y SAYZ, Adolfo. *Breve noticia histórica del Colegio de Artillería y estado de la Academia de dicha arma en España a principios de 1873*. Segovia, 1873. Citado en PÉREZ RUIZ (1960), *op. cit*., p. 106.

> desde su fundación: Cinco años: uno, llamado preparatorio, con Aritmética como materia principal, y Gramática y Ortografía como secundarias; el segundo, con los Elementos de Euclides y Baile; tercero, Álgebra e Idiomas; cuarto, Cálculo diferencial e integral, Estática, Dibujo, Idiomas y Esgrima; quinto, fin de la Mecánica, Fortificación, Artillería (entonces llamada Táctica), Ejercicios facultativos y operaciones prácticas.

En el marco de este plan de estudios se indica un hecho importante para los historiadores de las matemáticas: la enseñanza del cálculo diferencial e integral en el cuarto curso. Por ello, atendiendo a que la impartición de esta disciplina es un «testigo de la modernidad»[8] de las matemáticas del siglo XVIII, este artículo ahonda en la aportación de datos precisos sobre cuándo, cómo y en qué posibles textos europeos se basó el cálculo impartido en la Academia de Artillería[9].

Navarro Loidi ya despejó las dudas sobre la incorporación de esta disciplina en el Colegio[10]. A partir de un exhaustivo análisis de las Actas de las reuniones del Consejo del Colegio, Navarro[11] indica que en el periodo 1764-1767, cuando Eximeno fue primer profesor, no era imposible que el cálculo se mencionara en determinadas cuestiones, «pero no era una materia que se impartiera». El siguiente profesor que ocupó este cargo desde 1767 hasta 1772, Lorenzo Lasso de la Vega, «no creó ese curso de cálculo diferencial. Además, opinaba que no era necesario enseñarlo en el Colegio». La situación cambió con Cipriano Vimercati, primer profesor desde 1772 hasta 1777. En este periodo Navarro indica que en las Actas del año 1775 aparece esta materia «como contenido del examen de los cadetes de la primera clase, por lo que el cálculo diferencial e integral se comenzó a enseñar en Segovia en 1775». Adicionalmente[12], aporta las actas mensuales desde noviembre de 1775 hasta marzo de 1776 con el índice de las materias que se habían dictado en las clases de cálculo.

8. Sobre la modernidad en los textos de matemáticas que contenían el cálculo diferencial e integral, Mariano Hormigón escribe: «Las Matemáticas del siglo XVIII son el Cálculo Infinitesimal. Los desarrollos doctrinales que no tienen en cuenta el *Calculus* son obsoletos (salvo raras y esporádicas excepciones de alguna rama concreta del pensamiento matemático), mientras que los matemáticos que utilizan los recursos infinitesimales son modernos». HORMIGÓN, Mariano. «Las matemáticas en la Ilustración española. Su desarrollo en el reinado de Carlos III». En FERNÁNDEZ PÉREZ, Joaquín y GONZÁLEZ TASCÓN, Ignacio (eds.). *Ciencia, Técnica y Estado en la España Ilustrada*. Zaragoza: MEC/SEHCYT, 1990, p. 269.

9. Sobre el contexto europeo de las matemáticas en el ámbito de las escuelas militares, véase el número monográfico editado por BLANCO, Mónica y BRUNEAU, Oliver (eds.). «Les mathématiques dans les écoles militaires (XVIIIe-XIXe siècles)». *Philosophia Scientiæ*, 2020, 24(1).

10. NAVARRO LOIDI, Juan. «La incorporación del cálculo diferencial e integral al Colegio de Artillería de Segovia». *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 2013, 36(78), pp. 333-358.

11. NAVARRO LOIDI (2013), *op. cit.*, pp. 338-341.

12. Ver las Actas en NAVARRO LOIDI (2013), *op. cit.*, pp. 342-343.

Varios historiadores militares –entre ellos Vigón–[13] indican lo siguiente:

> Cipriano Vimercati, primer profesor del Colegio, redactó un tratado en ocho volúmenes, que no llegó a imprimirse, eran aquellos: dos de aritmética, dos de geometría, uno de álgebra, uno de aplicación de ésta a la geometría, uno de cálculo infinitesimal y uno de mecánica.

En los años que Vimercati fue primer profesor (1772-1777) el director seguía siendo el conde de Gazola, como segundo profesor estaba Baltasar Ferrer y como tercero, Isidoro Gómez –que había sido cadete del Colegio y obtenido su grado de subteniente en 1770[14] y que posteriormente, en 1793, llegó a ser presidente de la Sociedad Económica de Amigos del País de Segovia[15]–.

En este artículo se añade más luz sobre los inicios del cálculo diferencial e integral en la Academia de Segovia, ya que se ha localizado el cuaderno de un alumno de esta época: Martín García Loygorri, que contiene los apuntes copiados al dictado. Este manuscrito inédito, además de confirmar la veracidad de las Actas ya mencionadas, es un material de gran valor histórico porque proporciona información detallada sobre la cantidad y calidad de la enseñanza matemática impartida en España en el siglo XVIII y muestra la influencia de determinados textos de cálculo infinitesimal europeos.

2. Martín García Loygorri (1759-1824): estudios como cadete del Colegio de Artillería (1773-1776)

Martín García Loygorri (Fig. 1) nació de «ilustre cuna» en Corella (Navarra) el 5 de junio de 1759 y empezó su formación militar de cadete en el Real Colegio de Artillería de Segovia el 4 de mayo de 1773. Sus estudios los realizó de manera sobresaliente, ya que obtuvo el primer lugar en la promoción a subteniente, cuyo empleo logró el 26 de diciembre de 1776. Durante su carrera militar consiguió múltiples condecoraciones y distintos grados y empleos, siendo director general del Cuerpo de Artillería y director del Colegio desde 1810 a 1822. Murió el 30 de enero de 1824[16].

13. Vigón, Jorge. *Historia de la Artillería Española*. Madrid: CSIC, 1947, tomo II, p. 571. En esta referencia a Vimercati, Vigón se basa en la afirmación del historiador militar Serafín María de Sotto, conde de Clonard (1793-1862).

14. «Atendiendo el Rey al aprovechamiento que han manifestado en el Estudio de Matemáticas y Exercicios (sic) Militares los Caballeros Cadetes del Real Cuerpo de Artillería en el Colegio Militar de Segovía (sic), se ha servido S. M. promover á Subtenientes del mismo Cuerpo, á V. Isidoro Gómez». *Gaceta de Madrid*, 18 de septiembre de 1770. PDF (Referencia BOE-A-1770-525), p. 323.

15. Dato extraído de Quirós Montero, Diego. *Labor Social de los Hijos del Colegio/Academia de Artillería*. Segovia: Patronato del Alcázar de Segovia, 2016, p. 54.

16. Datos obtenidos de La Llave, Pedro de. *Biografía del Excmo. Sr. D. Martín García Loigorri, Teniente General del Ejército y Director General que fue de Artillería*. Madrid: Imprenta del Cuerpo de Artillería, 1887, pp. 5-30.

Precisamente de la etapa como director tras la guerra de la Independencia (1808-1814) se ha podido obtener información de sus años de estudio como cadete. Con el reinicio del funcionamiento del Colegio se hizo necesario la elaboración de un nuevo plan de estudios y García Loygorri, en su calidad de director, pasó a la consideración de la Junta Superior Facultativa de Artillería los ocho manuscritos de matemáticas que había copiado en sus clases de cadete, afirmando que el autor de su contenido era el matemático Cipriano Vimercati. Concretamente en 1817, en un oficio[17] enviado al vicepresidente de la Junta, García Loygorri se expresaba del siguiente modo:

> Excmo Señor: Tengo sobrado fundamento para creer que yo soy el único oficial activo que habiendo tenido la fortuna de estudiar en mi Colegio de Segovia todo el curso completo de matemáticas que escribió el sabio profesor 1.º del mismo Colegio D. Cipriano Vimercati, teniente del mismo Cuerpo, lo conserva manuscrito por mí mismo en la clase; y como estando dedicada la Junta Superior Facultativa a consultar sobre el plan de estudios que halle más conveniente para el mismo colegio, entiendo le puede ser muy conveniente el examen y meditación de dicha obra compuesta de dos tomos de aritmética, dos de geometría, uno de álgebra, otro de la aplicación de esta à la geometría, uno de cálculo infinitesimal y el último de mecánica, la acompaño a V.E. con calidad de devolución para otros fines, no pudiendo dejar de llamar la atención sobre el elocuente discurso preliminar que se halla al principio del primer tomo de aritmética. Dios guarde a V. E. muchos años. Madrid 12 de abril de 1817. El Director General, Martín García y Loygorri.

Posteriormente estos tomos permanecieron en poder de la familia hasta que, según el testimonio[18] de su hijo, el teniente general conde de Vistahermosa, desaparecieron en un saqueo que ocurrió en su casa la noche del 17 de julio de 1854. Más tarde fueron encontrados los tomos 2.º de Aritmética, 3.º de Álgebra y el de Mecánica. Entregados al conde, él mismo los donó en 1860 al Cuerpo de Artillería. Actualmente estos tres tomos se encuentran en la Biblioteca Central Militar (BCM).

El tercer tomo de Álgebra que indica el conde de Vistahermosa es el correspondiente a la parte de cálculo diferencial e integral: *Elementos del Algebra o Analisis Mathematica. Parte 3.ª. De la Analisis de los Infinitamente Pequeños* y constituye el objeto de estudio de este trabajo. Tras lo expuesto, parece seguro afirmar que el cuaderno de García Loygorri se corresponde con el tratado de Cipriano Vimercati que, según varios historiadores o biógrafos de este matemático, redactó para la enseñanza de esta disciplina en la Academia de Segovia.

17. Documentación hallada en cuartillas dobladas dentro del cuaderno de García Loygorri, Martín. *Elementos del Algebra o Analisis Mathematica. Parte 3.ª. De la Analisis de los Infinitamente Pequeños*. Manuscrito. Biblioteca Central Militar. Signatura: MS-440, 1776.

18. *Ibidem*.

Para García Loygorri, como se observa en la Figura 2, estas enseñanzas empezaron el 5 de diciembre de 1775 y terminaron el 12 de abril de 1776, impartidas por el profesor tercero de la Academia, Isidoro Gómez.

Figura 1: Martín García Loygorri[19].

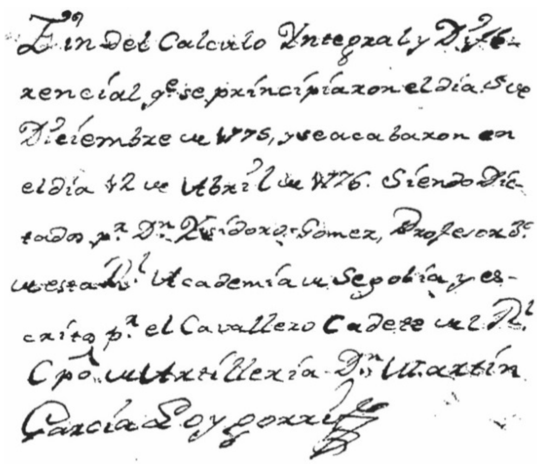

Fin del Calculo Integral y Dife-
rencial q.e se principiaron el dia 5 de
Diciembre de 1775, y se acabaron en
el dia 12 de Abril de 1776. Siendo dic-
tado p.r D.n Ysidoro Gomez, Profesor 3.o
de esta R.l Academia de Segovia y es-
crito p.r el Cavallero Cadete del R.l
C.po de Artilleria D.n Martin
Garcia Loygorri

Figura 2: Texto final del cuaderno.

3. El cuaderno de Cálculo Diferencial e Integral de García Loygorri (1775-1776)

El cuaderno (Fig. 3) tiene unas dimensiones de 20 cm de largo por 15 cm de ancho y 2.5 cm de alto y consta de un total de 280 páginas más 12 láminas desplegables al final del texto. Se encuentra bien conservado, aunque su lectura es bastante dificultosa puesto que la grafía es compleja (palabras sin separación, abreviaturas propias, letras ilegibles…). No existen páginas en blanco para separar unos capítulos de otros, tampoco tiene índice ni paginación[20], pero sí numeración de párrafos –aunque con poca lógica ya que, debido a su extensión, en una misma notación del párrafo se pueden plantear distintos temas–. Normalmente las definiciones o ideas significativas están subrayadas.

19. Imagen extraída de VV. AA. *Los artilleros del Real Colegio de Artillería en el Alcázar de Segovia durante el reinado de Carlos III*. Segovia: Patronato del Alcázar de Segovia, 1988, p. 119.

20. Al no estar el manuscrito paginado, para facilitar la búsqueda de las citas correspondientes al mismo, se ha realizado una numeración propia.

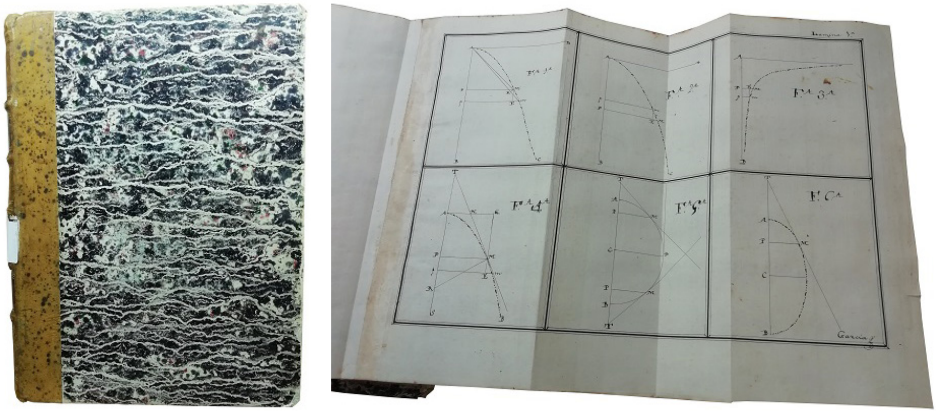


Figura 3: Fotografías propias de la cubierta y láminas del cuaderno.

El texto está dividido en 3 capítulos y cada uno consta de 3 a 5 artículos. La distribución y carga porcentual es la siguiente:

Tabla 1: Elaboración propia del índice de García Loygorri

CUADERNO DE MARTÍN GARCÍA LOYGORRI (1775-1776) ELEMENTOS DEL ALGEBRA O ANALISIS MATHEMATICA PARTE 3.ª. DE LA ANALISIS DE LOS INFINITAMENTE PEQUEÑOS (280 pp. + 12 láminas)			
CAPÍTULOS	**ARTÍCULOS**	**PP.**	**PP. (%)**
INTRODUCCIÓN		13	13 (4.6 %)
1: DEL CÁLCULO DIFERENCIAL	1: Principios y reglas de este cálculo	20	127 (45.4 %)
	2: Uso de este cálculo para determinar las tangentes de las curvas	26	
	3: Uso del cálculo diferencial para resolver las cuestiones de los máximos y mínimos	27	
	4: Uso del cálculo diferencial para hallar el punto de inflexión contraria y de regreso en las curvas	34	
	5: Uso del cálculo diferencial para hallar las evolutas de las curvas y los radios osculadores	20	

CUADERNO DE MARTÍN GARCÍA LOYGORRI (1775-1776) ELEMENTOS DEL ALGEBRA O ANALISIS MATHEMATICA PARTE 3.ª. DE LA ANALISIS DE LOS INFINITAMENTE PEQUEÑOS (280 PP. + 12 LÁMINAS)			
CAPÍTULOS	**ARTÍCULOS**	**PP.**	**PP. (%)**
2: DE LAS DIFERENCIALES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES Y DE LAS DE LOS SENOS Y COSENOS	1: De las funciones en general	7	41 (14.6 %)
	2: De las diferenciales logarítmicas	16	
	3: De las diferencias de las cantidades exponenciales	4	
	4: De las diferenciales de senos y cosenos	14	
3: DEL CÁLCULO INTEGRAL	Principios del cálculo integral	3	99 (35.4 %)
	1: De las cantidades que tienen una sola variable y son integrables. Diferenciales monomias, binomias…	18	
	2: Uso del cálculo integral para hallar la cuadratura y rectificación de las curvas	67	
	3: Uso del cálculo integral para cubar los sólidos y medir las superficies	11	

3.1. Obras inspirativas e influyentes en el cuaderno

Sobre las posibles fuentes que inspiraron estos apuntes, se puede empezar por los autores matemáticos citados en el cuaderno.

El texto se inicia con una breve *Introducción* histórica donde se mencionan: Arquímedes (288 a. C.-212 a. C.), Renato Descartes (1596-1650), Buenaventura Cavalieri (1598-1647), Guillermo Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727).

Ya en la exposición propiamente dicha del cálculo, el primer autor que se cita es la matemática italiana María Gaetana Agnesi (1718-1799) con sus *Instituzioni Analitiche* (1748)[21], cuyo segundo volumen es de cálculo diferencial e integral. En las primeras páginas del cuaderno se remite a ella para la demostración por geometría de las diferenciales de órdenes superiores. El manual de Agnesi no aparece más veces citado, pero el estudio de los contenidos del cuaderno permite afirmar que fue uno de los principales libros utilizado en su elaboración. El índice

21. AGNESI, M.ª Gaetana. *Instituzioni Analitiche*, tomo II. Milano: Nella Regia-Ducal Corte, 1748. Sobre Agnesi véase MAZZOTTI, Massimo. *The World of Maria Gaetana Agnesi, Mathematician of God*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2007.

del capítulo 1, que trata el cálculo diferencial (Tabla 1), es idéntico al de Agnesi (Anexo, Tabla 2). También hay correspondencia con los temas de cálculo integral, pero no con tanta exactitud. Una coincidencia interesante se observa en el trabajo con cónicas, ya que el cuaderno sigue el texto de Agnesi en su distinción entre cónicas apolonianas[22] y de órdenes superiores. De hecho, en la organización y estudio de las cónicas se observan más similitudes entre estos dos textos que con otros manuales.

El segundo matemático citado –al que más se alude– es Euler (1707-1783) con su *Introductio in analysin infinitorum* (1748)[23], aunque esto no significa que sea el manual más utilizado para la elaboración de los apuntes. De hecho, los otros dos textos que componen la trilogía de Euler –*Institutiones Calculo Diferentialis* (1755) e *Institutiones Calculo Integralis* (1768-1770)– ni los cita ni parece que fuesen utilizados[24].

Los autores indicados para ampliar el trabajo con las series son Cramer (1704-1752) con la *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750) y Euler con la *Introductio*. E igualmente para este tema, pero sin nombrar el texto concreto, remite a los siguientes matemáticos: los hermanos Bernoulli, Jacobo (1655-1705) y Juan (1667-1748); Stirling (1692-1770); Riccati (1676-1754), y el trabajo de Pierre Varignon (1654-1722) en las Memorias de la Academia, aunque sin indicar su año de publicación.

De Pierre Varignon también cita el trabajo en las Memorias de la Academia de 1706, donde pone de manifiesto la equivocación de Wallis (1616-1703) en la *Arithmetica infinitorum* (1655) en el criterio para distinguir las tres clases de hipérbolas con relación a sus asíntotas.

Otro matemático al que también hace referencia es Ludolph van Ceulen (1540-1610), a propósito del *número ludolphino* –valor de π con una aproximación de 35 cifras decimales–.

Estos son todos los autores mencionados en el cuaderno, pero el estudio de su contenido pone de manifiesto otros libros de texto que fueron utilizados en su redacción –aunque ciertamente sobre ellos no hay ninguna alusión–.

Una obra que sin lugar a dudas sirvió de base fue el texto de 1740 *Le calcul differentiel et le calcul integral, expliqués et appliqués à la geometrie*[25] del padre

22. Las cónicas apolonianas son las curvas de segundo grado de Apolonio de Perga, mientras que las curvas expresadas por las ecuaciones $y = x^n$, $k = y^m x^n$ son parábolas e hipérbolas generalizadas o de orden superior.

23. EULER, Leonhard. *Introductio in Analysin Infinitorum*, tomo I. Lausanne: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, 1748.

24. Para comparar el planteamiento que se utiliza en el cuaderno con los fundamentos eulerianos del cálculo, puede verse, entre otros, el trabajo de FERRARO, Giovanni. «Differentials and differential coefficients in the Eulerian foundations of the calculus». *Historia Mathematica*, 2004, 31, pp. 34-61.

25. DEIDIER, L'Abbé. *Le calcul differentiel et le calcul integral, expliqués et appliqués à la geometrie*. Paris: Chez Charles-Antoine Jombert, 1740.

Deidier (1698-1746), con el que no solo va a coincidir en la exposición de bastantes temas (Anexo, Tabla 3), sino que la similitud en las figuras de las láminas es abrumadora. Otro texto que seguramente se utilizó fue el del matemático francés Etienne Bézout (1730-1783) con su *Cours de Mathématiques*[26]. Con este manual las similitudes se establecen sobre todo en la organización y explicación del cálculo integral (Anexo, Tabla 4). Además, tanto Deidier como Bézout fueron profesores de escuelas militares[27] que redactaron sus manuales para la enseñanza en estos centros.

También en España, en 1756, el ingeniero militar Pedro Padilla (1724-1807?) había redactado el primer texto de cálculo infinitesimal[28], por lo que merece la pena comprobar si en el cuaderno existen pistas que puedan hacer pensar que estos apuntes se apoyaron en el manual de Padilla. La conclusión es que no parece que fuera considerado para la orientación de la enseñanza de esta asignatura en los artilleros. En el estudio del texto de Padilla, Blanco[29] afirma que «tras un examen de los contenidos del tratado V, resulta evidente que Padilla se inclinaba por el método de fluxiones y el enfoque newtoniano». Sin embargo, como se demuestra en este artículo, en el manuscrito de García Loygorri el cálculo es diferencial y el enfoque indudablemente leibniziano. Además, contiene una mayor cantidad de temas con más extensión y profundidad que en el texto de Padilla. En lo que sí coinciden ambos es que ninguno trata las ecuaciones diferenciales.

A continuación se realiza el análisis de los contenidos del manuscrito de García Loygorri, señalando los indicios –o en su caso la cita concreta– de los matemáticos anteriormente nombrados.

26. BÉZOUT, Étienne. *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine. Quatrieme partie: Contenant les principes généraux de la Méchanique, précédés des Principes de Calcul qui servent d'introduction aux Sciences Physico-Mathématiques*. Paris: Chez J. B. G. Musier fils, 1770.

27. Deidier fue profesor desde 1738 hasta 1746 de la Escuela de Artillería de La Fère, sucediendo en este puesto a Bernard Forest de Bélidor, que lo había ocupado desde la fundación de la escuela en 1720 hasta 1738. Bézout fue un destacado autor de textos de matemáticas en las escuelas militares francesas, logrando que sus libros fueran ampliamente reeditados no solo durante el siglo XVIII, sino también en los inicios del XIX. Véase ALFONSI, Liliane. *Étienne Bézout (1730-1783). Mathématicien des Lumières*. Paris: L'Harmattan, 2011.

28. PADILLA ARCOS, Pedro. *Curso Militar de Mathematicas sobre las partes de estas Ciencias, pertenecientes al Arte de la Guerra, para el uso de la Real Academia, establecida en el Quartel de Guardias de Corps*. Tomo IV. Tratado V: *De los Calculos Diferencial, è Integral, ò methodo de las Fluxiones*. Madrid: Imprenta de Antonio Marín, 1756.

29. BLANCO ABELLÁN, M. «El método de las fluxiones en la Academia de Matemáticas del Cuartel de Guardias de Corps: una revisión sobre el Curso Militar de Mathematicas de Pedro Padilla (1753-1756)». En URKÍA, José M.ª (ed.). *XI Congreso de la SEHCYT*. San Sebastián: Publidisa, 2012, p. 389.

4. Elementos del Algebra o Analisis Mathematica. Parte 3.ª. De la Analisis de los Infinitamente Pequeños

4.0. Introducción[30]

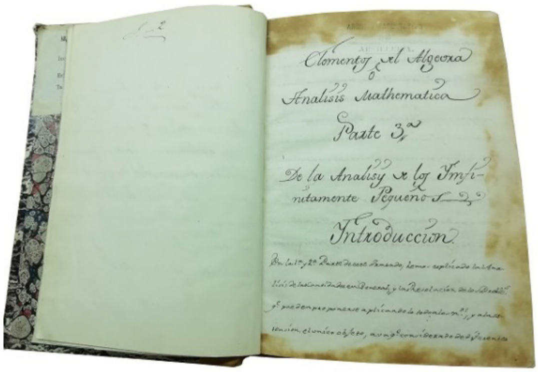


Figura 4: Fotografía propia del inicio del cuaderno.

Empieza el texto (Fig. 4) exponiendo que, a diferencia de las dos primeras partes de este tratado, donde se ha trabajado con cantidades finitas, en esta tercera parte «se va a penetrar en los inmensos espacios del infinito».

Seguidamente realiza un breve recorrido histórico destacando el trabajo sobre el infinito de la matemática griega (Arquímedes), la gran aportación geométrica de Descartes, la geometría de los indivisibles de Buenaventura Cavalieri y termina con la creación del cálculo por Leibniz y Newton. De quienes trata la conocida disputa y su diferente concepción y denominación del cálculo: *diferencial e integral* para Leibniz y *cálculo de fluxiones e inverso de las fluxiones* para Newton.

4.1. Capítulo 1.º: Del Cálculo Diferencial[31]

4.1.1. Artículo 1.º: Principios y reglas de este cálculo[32]

No se realiza ningún planteamiento filosófico sobre la naturaleza de los infinitesimales, sino que empieza directamente con la definición, la jerarquía de

30. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 1-13.
31. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 13-140, §§1-69.
32. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 13-34, §§1-11.

órdenes y los principios que se consideran «innegables» para fundar el cálculo, todo ello con el enfoque dado por Leibniz:

> Diferencia o diferencial de una cantidad bariable (sic) se llama un aumento o disminución instantánea infinitamente pequeña de la misma cantidad. Y por infinitamente pequeña se entiende una cantidad menor que cualquiera cantidad asignable[33].

Después se indica la jerarquía sobre los órdenes o géneros de las diferenciales. De primer orden o primer género: dx o dy; de segundo orden, que pueden ser de dos tipos: productos o potencias de cualesquiera diferenciales, como $dxdx$ o dx^2, $dxdy$, o bien diferenciales de diferenciales, como ddx o d^2x. Y lo mismo puede establecerse con los órdenes superiores. Precisamente al tratar estas diferenciales se nombra el texto *Instituzioni Analitiche* de Agnesi:

> Pero ahora baste saber por vía de suposición que las diferenciales de órdenes superiores son conformes y se demuestran por la geometría, como se puede ver en las Instituciones de la Agnesi, Libro 2.º Capítulo 1.º y en otros[34].

Después, aunque con bastante desorden, se van estableciendo los principios –o postulados– para fundar el cálculo. De ellos merece la pena destacar los tres siguientes:

- Esto es que una diferencial de cualquier orden que sea es nula o despreciable en comparación de la cantidad de quien es diferencial, sea esta cantidad finita o infinitamente pequeña[35].
- Las cantidades cualesquiera que solo se diferencian en una infinitésima son iguales, o lo que es lo mismo toda cantidad que no se a (sic) aumentado o disminuido, sino en un aumento o disminución infinitamente pequeña respecto de la cantidad se puede considerar como que es la misma que antes[36].
- Se considera una curba (sic) como un agregado de una infinidad de líneas rectas infinitamente pequeñas, o como un polígono de infinitos lados infinitamente pequeños, los cuales por los ángulos que forman entre sí determinan la curbatura (sic) de la línea[37].

Para lograr una mayor claridad en la comprensión de los conceptos o de los principios, se muestran algunas figuras. Así en la figura 1 de García Loygorri (Fig. 5), que es una parábola, se indican el parámetro AD, su eje o diámetro AB, la abscisa $AP = x$, la ordenada $PM = y$, la cuerda AM, y el arco parabólico AM. Si se traza una segunda ordenada pm infinitamente próxima a PM, entonces las

33. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 13-14, §1.
34. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 18, §3.
35. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 19, §3.
36. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 21, §5.
37. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 21-22, §6.

diferenciales de las variables son $dx = Pp$, $dy = mE$, *RM* la diferencial de la cuerda *AM* y *Mm* la diferencial del arco parabólico *AM*. Del mismo modo el pequeño trapecio *PpmM* será la diferencial del espacio parabólico *APM*.

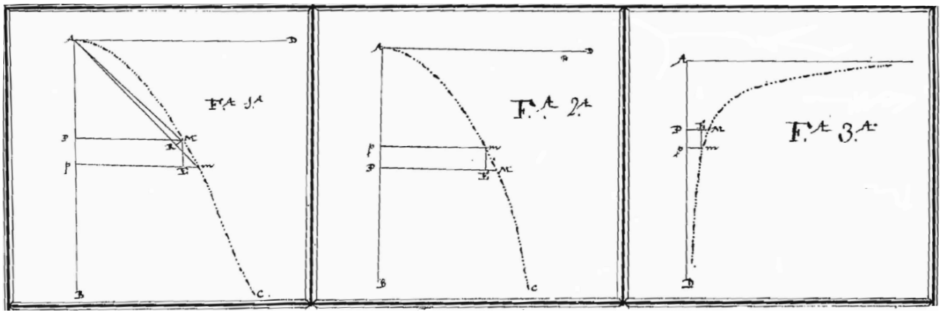


Figura 5: Figuras 1, 2 y 3 del cuaderno.

También para la visualización correspondiente de algunos principios se remite a las figuras. Por ejemplo, para el principio señalado anteriormente (que las cantidades que solo se diferencian en una infinitésima son iguales) hace referencia a las figuras 1 a 3 (Fig. 5), indicando que de este modo *AP* se puede tomar por *Ap*, *PM* por *pm* y viceversa.

Basándose en los postulados establecidos, enuncia la regla general para hallar la diferencial en las operaciones habituales de sumar, restar, multiplicar, dividir y el producto de una variable por una constante:

> Consiste en sustituir cada cantidad simple más su diferencial en su lugar; hacer después según el método ordinario la suma, resta, multiplicación o partición con estas cantidades sustituidas y después quitar del resultado la cantidad propuesta y los términos que sean nulos. Y lo que quede será la diferencial que se busca[38].

Por ejemplo, veamos cómo halla la diferencial del producto:

> Sean *xy* las variables multiplicadas, y se pide la diferencial de este producto. La de *x* es: *x* + *dx*. La de *y* es: *y* + *dy*. Siendo estas iguales a las propuestas será *xy* = *x* + *dx* X *y* + *dy*. Agase (sic) la multiplicación efectiva y será *xy* = *xy* + *ydx* + *xdy* + *dxdy*. Restando la cantidad finita *xy*, y quitando el producto *dxdy*, que por ser un producto de dos diferenciales infinitamente pequeñas es nulo, será lo que queda: *ydx* + *xdy* Espresión (sic) de la diferencial que se busca[39].

38. García Loygorri (1776), *op. cit*., pp. 22-23, §7.
39. García Loygorri (1776), *op. cit*., p. 24, §9, 1.º.

Termina con la diferencial de una potencia, donde el exponente puede ser entero o fraccionario y positivo o negativo. Todo esto se muestra apoyado con ejemplos para lograr el manejo adecuado en el proceso de la diferenciación.

Es sabido que se trata de un cálculo con una fundamentación débil y que contiene las inconsistencias lógicas de los infinitésimos que fueron objeto de tantas críticas. Así pues, los principios y reglas del cálculo diferencial que están en el cuaderno serían los habituales que pueden encontrarse en los libros de texto que continúan la estela marcada por el primer manual de cálculo: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* de L'Hôpital[40].

Ya se ha indicado que una de las fuentes era Agnesi, pero un análisis del texto de Deidier –aunque no mencionado en el cuaderno– permite asegurar su utilización. Esto se puede observar con facilidad en la coincidencia de las figuras 1, 2 y 3 de García Loigorri (Fig. 5) y las correspondientes de Deidier (Fig. 6).

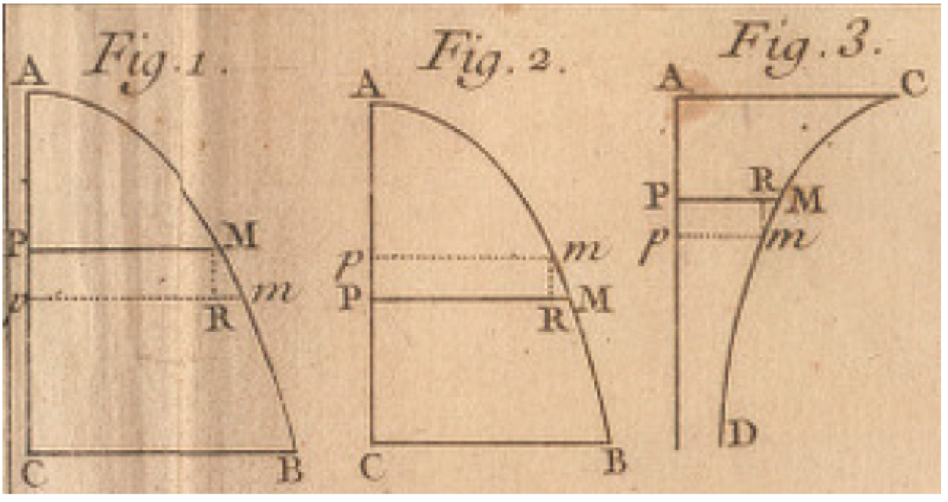


Figura 6: Figuras 1, 2 y 3 de Deidier (1740).

En los siguientes artículos del manuscrito se van exponiendo las potentes aplicaciones de la diferenciación en la geometría de curvas: determinación de las tangentes; máximos y mínimos; puntos de inflexión y de regreso de las curvas, y, finalmente, las evolutas y los radios osculadores.

40. L'Hôpital, Guillaume F. A. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. 2.ᵉ édition. Paris: Chez Etienne Papillon, 1716. Su primera edición es de 1696.

4.1.2. Artículo 2.º: Uso de este cálculo para determinar las tangentes de las curvas[41]

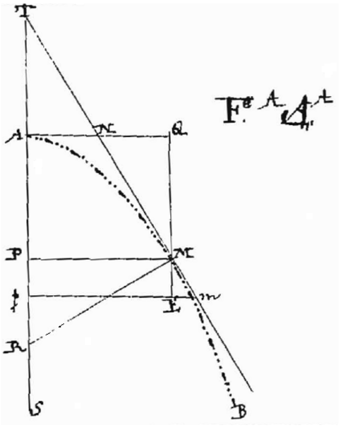


Figura 7: Figura 4 del cuaderno.

Empieza este artículo 2.º sin ninguna definición, sino directamente refiriéndose a la figura correspondiente (Fig. 7):

> Sea una curba (sic) *AMB* (fig. 4.º) cuyo eje o diámetro *AS*, sea el punto *M* del contacto de la tangente y sea tal curba que la relación de sus abscisas *AP* a las ordenadas *PM* este espresada (sic) por una ecuación cualquiera. Lo que se pide es determinar en el punto dado *M* la tangente *MT*[42].

Por el postulado anteriormente mencionado –polígono infinitangular– hace notar que el arco infinitamente pequeño *Mm* se puede considerar como uno de los lados infinitamente pequeños del polígono, siendo la tangente *MT*, continuación de este lado.

Para hallar la tangente resulta más conveniente determinar primero la subtangente[43] –en esta figura la distancia *TP*. Para ello, se supone trazada la tangente y por semejanza de triángulos –comparando el infinitamente pequeño *EMm* con *TPM*– obtiene la expresión general de la subtangente: $PT = y\frac{dx}{dy}$. A partir de esta, puede hallarse la tangente (por el Teorema de Pitágoras): $TM = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$. Con

41. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 34-59, §§12-27.
42. García Loygorri (1776), *op. cit.,* p. 34, §12.
43. La subtangente se refiere a la distancia entre el punto en que la tangente a una curva corta al eje y el pie de la perpendicular trazada desde el punto de contacto y dicho eje. Es la proyección de la tangente.

lo que se concluye que para trazar una tangente por un punto cualquiera de una curva solo es necesario determinar el valor de la subtangente en la curva dada.

Como se observa, el uso de la subtangente tiene un cálculo muy sencillo y, por tanto, una vez hallado el punto T solo hay que unir M con T para obtener la tangente. Hoy en día no es habitual trabajar con la subtangente, pero en el cálculo del siglo XVIII era importante y de frecuente aplicación[44].

De este modo, trabajando con el triángulo diferencial y considerando la semejanza de triángulos va obteniendo distintos valores, entre ellos cabe destacar la subnormal[45]: $PR = y\frac{dy}{dx}$ y la normal: $MR = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$.

A continuación resuelve varios ejemplos. En el primero considera la ecuación de la circunferencia: $y^2 = ax - x^2$ –en García Loygorri se denomina la ecuación del círculo– y amplía este estudio con los círculos de infinitos géneros: $y^{m+1} = ax^m - x^{m+1}$. Después trabaja con la parábola apoloniana[46] de ecuación $y^2 = x$, la elipse apoloniana: $y^2 = px - p\frac{x^2}{a}$ y la hipérbola referida a las asíntotas: $a^2 = xy$. Termina con el estudio de las ecuaciones $x = y^m$ que representan *las parábolas e hipérbolas al infinito del parámetro y potencia* –es decir, las parábolas siendo *m* positivo entero o quebrado y las hipérbolas siendo negativo también entero o quebrado– y se analizan algunos casos particulares de *m*.

Como las asíntotas son rectas tangentes a la curva en el infinito, también se acomete su estudio, primero de forma general y después particularizándolo en algunos ejemplos.

Hasta el momento siempre se ha supuesto que el ángulo que forman las ordenadas con las abscisas es recto, pero, si no lo es, se van realizando las reformas necesarias en las expresiones que se han ido considerando para trabajar de este modo si el problema así lo requiere.

Para finalizar el artículo, y como solo se ha trabajado sobre curvas algebraicas, se analiza una curva transcendente: la cicloide.

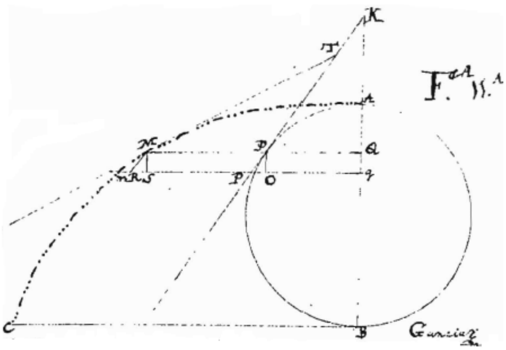
En cuanto a las coincidencias del cuaderno con las obras de Deidier y Agnesi el paralelismo es grande: las figuras que ilustran la teoría tienen mayor similitud con las de Deidier, pero el contenido parece más acorde con el texto de Agnesi,

44. Por ejemplo, véase en este trabajo el apartado 4.2.2 sobre la utilización de la subtangente en el cálculo de la diferencial logarítmica.

45. La subnormal es la proyección de la normal con el eje considerado.

46. Esta es la primera vez que aparece en el cuaderno el adjetivo apoloniana en una cónica. También se utiliza por primera vez en el texto de Agnesi al hallar la subtangente de la parábola apoloniana, esto es, *yy* = *ax*. Hay matemáticos que emplean esta denominación (véase FERMAT, Pierre de. *Œuvres de Fermat*. Publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'Instruction Publique. Tome Premier. Paris: Gauthier-Villars, 1891, p. 256), pero otros autores no la utilizan (por ejemplo, en el texto de L'HÔPITAL, *op. cit.*). Tampoco la utiliza Padilla, pero otros matemáticos españoles, ya en el siglo XIX, sí que emplean esta denominación como José Mariano Vallejo –la parábola apoloniana o vulgar– o el artillero José Odriozola.

cuya estructura es idéntica: cálculo de longitudes de segmentos –subtangente, tangente, subnormal, normal y otras–, asíntotas, coordenadas oblicuas y aplicación de estas ideas en curvas algebraicas y transcendentes. La diferencia está en la exhaustividad en el tratamiento de estos conceptos. En el texto de Agnesi se utilizan 56 páginas impresas con 25 figuras, en el cuaderno 26 manuscritas con 8 figuras, entre las que se encuentran algunas similares –como la cicloide (Figs. 8 y 9)–. Además de los ejemplos indicados en García Loygorri, Agnesi trabaja con otras curvas algebraicas, como la concoide de Nicomedes y la cisoide de Diocles, o con curvas transcendentes, como la espiral de Arquímedes, la cuadratriz de Dinóstrato o la espiral logarítmica. Como ya se ha indicado, en ambos textos aparece la denominación apoloniana en las cónicas, un término que Deidier no utiliza (alguna vez se refiere a la parábola cuadrada o a la hipérbola ordinaria).



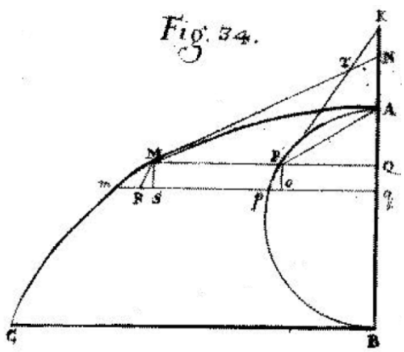


Figura 8: García Loygorri (1776), Fig. 11 Lámina 2. Figura 9: Agnesi (1748), Fig. 34 Lámina 6, Tomo II Libro II.

4.1.3. Artículo 3.º: Uso del cálculo diferencial para resolver las cuestiones de los máximos y mínimos[47]

Empieza este artículo considerando que cuando algunas cantidades variables crecen (o decrecen) continuamente hasta cierto término y llegando a él decrecen si crecían (o crecen si decrecían), estos términos o puntos se llaman máximos (o mínimos). El método utilizado no solo servirá para hallarlos, sino también para determinar otras cuestiones, como encontrar los puntos en que la recta tangente es paralela a la línea de abscisas o de ordenadas.

Para hallar estos puntos clasifica la curva en cuatro formas: cóncava, convexa y, dentro de estas, reentrante –se vuelve sobre sí misma– y no reentrante. A

47. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 59-86, §§28-36.

continuación se da la regla general para determinar las máximas o mínimas ordenadas de una curva reentrante:

> Diferenciar la ecuación a la curba (sic) y poniendo en un lado el balor (sic) de dy, hacer las 2 suposiciones $dy = 0$, $dy = \infty$; ó $dx = 0$, $dx = \infty$ pues biene (sic) a ser lo mismo pues recíprocamente cuando $dx = 0$ es $dy = \infty$ y cuando $dy = 0$, $dx = \infty$ y reduciendo resultara el balor de las ordenadas máximas y mínima que se busca, teniendo atención a si la curba es concaba (sic) o conbexa (sic)[48].

Al analizar los dos casos $dy = 0$, $dy = \infty$[49] consigue obtener un método que permite obtener los máximos o mínimos y también los puntos en que la tangente es paralela a las abscisas o a las ordenadas.

Posteriormente, añade que el método no determina si el punto hallado es un máximo o un mínimo. Para discernir entre uno u otro propone o bien describir la curva para tomar la decisión o bien dar un valor a la abscisa x algo mayor o menor que el obtenido con el método y, según sea su resultado, decidir si se trata de un máximo o un mínimo.

Hay varias cuestiones que llaman la atención: si con la letra d delante de una variable se denota un infinitesimal, ¿qué sentido tiene poner $dy = \infty$? Sobre esta notación Deidier[50] afirma: «le *dy* correspondant à la plus grande ordonnée est égal à l'infini par rapport à *dx*». Otra cuestión es que cuando no se conoce la curva, mirar solo un valor cerca del calculado para saber si este es un máximo o un mínimo no permite una determinación clara del punto en cuestión –lo más lógico es compararlo con uno más pequeño y otro más grande para fijarlo con exactitud–. No obstante, en el estudio de curvas con determinadas propiedades[51] cabe la posibilidad de discernir con un único valor si se trata de un máximo o un mínimo.

Hasta aquí llegan las coincidencias del cuaderno con el texto de Agnesi –exceptuando la clasificación de curva no reentrante y reentrante no presente en este último–. A partir de ahora se plantean cuestiones de optimización y su paralelismo es mayor con el manual de Deidier. Con él, no solo coincide en la clasificación de curvas no reentrantes y reentrantes, sino también en el estudio de optimización para hallar la menor recta que se puede trazar al perímetro de una curva algebraica desde un punto situado en su eje o fuera de la curva. Sin embargo, Deidier, en el estudio de los máximos y mínimos, se centra casi con exclusividad en $dy = 0$, y solo para algunos casos indica qué debe hacerse cuando $dy = \infty$.

En cuanto a las figuras, para cuatro de las diez que se encuentran en García Loygorri se hallan figuras muy semejantes entre las quince de Agnesi, pero son

48. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 69-70, §29.
49. En el estudio del caso $dy = \infty$, por lo tanto $dx = 0$, se cometen varios errores.
50. Deidier (1740), *op. cit.*, p. 301, §77.
51. Las curvas pueden ser convexas, cóncavas, reentrantes o no.

siete las figuras de García Loygorri que se identifican como coincidentes entre las veintisiete que aparecen en el manual de Deidier.

De haber sido utilizado el texto de Padilla para la elaboración del cálculo de máximos y mínimos en el Colegio de Artillería se hubiera aligerado el laborioso estudio de curvas reentrantes y no reentrantes y cóncavas o convexas mediante un algoritmo más rápido y no tan unido a las particularidades de la curvas. Resulta sorprendente que, con la fuerte base geométrica que parece dominar el cálculo de la época, Padilla[52] eligiera una visión algebraica e indudablemente simplificadora como el método de MacLaurin en su Tratado de Fluxiones (1742), actualmente todavía en uso. Padilla[53], en notación leibniziana con las diferenciales y utilizando la serie de MacLaurin, caracteriza los máximos y mínimos en términos de la primera diferencial de la ordenada igual a cero y del signo de las siguientes diferenciales distintas de cero considerando si son pares o impares.

Los contenidos recogidos en este artículo del manuscrito coinciden básicamente con la exposición de otros textos contemporáneos de su época, como los de Bézout o Bails[54]. En ellos también se analizan los valores para $dy = 0$ y $dx = 0$ (sin manejar $dy = \infty$, sino el equivalente $dx = 0$) y se compara el valor hallado con otros próximos, pero no solo con uno –como se indicaba anteriormente–, sino con dos[55], para determinar si el valor hallado correspondía a un máximo o a un mínimo.

4.1.4. Artículo 4.º: Uso del cálculo diferencial para hallar el punto de inflexión contraria y de regreso en las curvas[56]

Comienza indicando que hasta el momento solo se ha utilizado la primera diferencial, pero que en este artículo y el siguiente se necesitará aplicar las diferenciales de órdenes superiores, por lo que procede a estudiar su generación. Teniendo en cuenta la visión tan abstracta del análisis actual, resulta particularmente interesante la obtención gráfica de la diferencial segunda de y.

En las curvas cóncavas/convexas y reentrantes o no reentrantes se estudian los signos y el aumento o disminución de las diferenciales de segundo orden. Todo ello le permite definir dos puntos especiales: el *punto de inflexión* (donde la curva cambia de *rumbo* pasando de cóncava a convexa o viceversa) y el *punto*

52. Padilla (1756), *op. cit.*, p. 236, §129.

53. Padilla (1756), *op. cit.*, pp. 226-227, §120.

54. Bails, Benito. *Elementos de Matemática*, tomo III. Madrid: Imprenta de D. Joaquín Ibarra, 1779.

55. Bézout (1770), *op. cit.*, p. 65, §50, y Bails (1779), *op. cit.*, p. 296, §404, indican que se deben analizar dos valores, uno menor y otro mayor que el considerado y si los resultados obtenidos son reales y menores (o mayores) que el considerado, se obtendrá un máximo (o mínimo). En el caso de obtener un número real y otro imaginario el valor considerado es a la vez un máximo y un mínimo.

56. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 86-120, §§37-57.

de regreso (donde la curva retrocede del *camino* que llevaba). En ambos casos, su obtención se hallará haciendo: $d^2y = 0$ o $d^2y = \infty$.

A continuación explica el cálculo de las diferenciales de órdenes superiores, dando las reglas correspondientes para diferenciar el producto, cociente, potencia y el producto de una variable por una diferencial. Por ejemplo:

> Se ha de diferenciar la cantidad xdx si se consideran estos 2 factores como cantidades ordinarias los mismos principios que nos condujeron a hallar la diferencial de un producto nos conduciran a hallar estas diferenciales $xdx = xXdx = \overline{x + dx}X\overline{x + d^2x}$ […] Agase (sic) la multiplicación y será el producto $xdx + dxdx + xd^2x + dxd^2x$ este producto contiene la cantidad xdx cuya diferencial se pide y por consiguiente se debe quitar, también contiene la cantidad dxd^2x diferencial de 3.^{er} orden y por consiguiente nula respecto de la del 2.º que se busca y quitándola lo que da es $dx^2 + xd^2x$ diferencial que se pide[57].

Para el cálculo del punto de inflexión o de regreso realiza tres ejemplos, uno en una curva algebraica, otro en una transcendente (la cicloide) y la tercera en otra algebraica: la concoide de Nicomedes, pero ahora en coordenadas polares –que no utiliza este nombre sino *curvas cuyas ordenadas parten de un punto*–, en este caso solo plantea $d^2y = 0$ y no $d^2y = \infty$.

Aunque bastante más extenso, el tratamiento de este capítulo en los textos de Agnesi y Deidier es muy similar a lo expuesto aquí. El cuaderno sigue el orden de exposición de Deidier en los varios asuntos que se van tratando. El procedimiento para obtener las diferenciales de órdenes superiores en Agnesi ya se había realizado al inicio del libro, en el capítulo 1, mientras que en García Loygorri y en Deidier se explica en este artículo. En los tres está el ejemplo de la cicloide y la concoide. Pero está claro que es la obra de Deidier la fuente para los apuntes de García Loygorri, donde casi todas las figuras –trece de un total de dieciséis– están tomadas del matemático francés.

4.1.5. Artículo 5.º: Uso del cálculo diferencial para hallar las evolutas de las curvas y los radios osculadores[58]

La definición de evoluta es realmente oscura y difícil de entender. Considera que la curva está envuelta en un hilo y si éste se desenvuelve de forma «bien tensa y tirante» se va formando otra curva, con ello ya tiene una figura que le permite definir distintos elementos: evoluta, radio de la evoluta o radio osculador, curvatura…

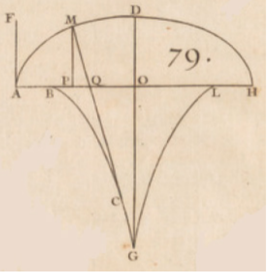
El cálculo del radio osculador y la evoluta se explican distinguiendo si las ordenadas son paralelas entre sí y perpendiculares al eje o si las ordenadas salen

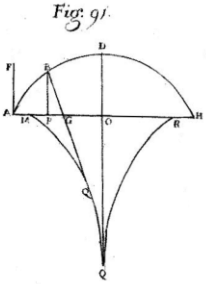
57. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 106-107, §52, ejemplo 1.º.
58. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 120-140, §§58-69.

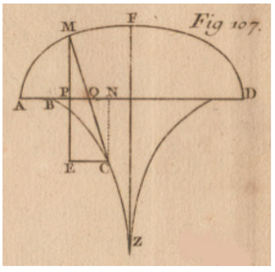
de un punto. Finalmente se dan dos ejemplos, el primero en la parábola apoloniana de ecuación $y^2 = ax$ y el segundo en la elipse apoloniana: $ay^2 = apx - px^2$, en ambos con las ordenadas perpendiculares.

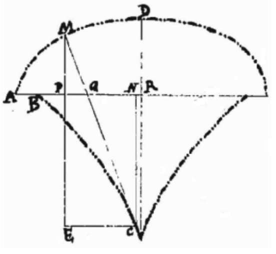
Los textos de Deidier y Agnesi trabajan este tema con bastante más extensión, profundidad y ejemplos: ambos analizan no solo las cónicas, sino otras muchas curvas –Agnesi utiliza incluso ordenadas oblicuas–.

La figura que utilizan para hallar la evoluta de la elipse es semejante en todos, si bien puede corroborarse más similitud de L'Hôpital (Fig. 10) con Agnesi (Fig. 11) y de Deidier (Fig. 12) con García Loygorri (Fig. 13).









Figuras 10, 11, 12 y 13: L'Hôpital (79), Agnesi (91), Deidier (107), García Loygorri (44).

4.2. Capítulo 2.º: De las diferenciales logarítmicas y exponenciales y de las de los senos y cosenos[59]

Este capítulo forma una entidad separada de los otros dos que componen el manuscrito (Tabla 1). Esto es muy significativo, ya que es la parte más novedosa del manuscrito –al menos el primer y cuarto artículo–.

59. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 140-182, §§70-116.

El primer artículo trata las funciones, dejando por el momento las curvas, y este cambio sorprende porque se desmarca de las fuentes principales que hasta el momento ha venido utilizando. Ahora Euler (1707-1783) y su primer tomo de la *Introductio in Analysin Infinitorum* –publicado el mismo año que el de Agnesi– pasa a ser el manual utilizado.

Los artículos dos y tres –sobre la diferenciación de las cantidades logarítmicas y exponenciales, respectivamente–, aunque realizados con curvas y sin utilizar funciones, no son tratados en la sección de cálculo integral[60], como hacen Agnesi (Tabla 2) y Deidier (Tabla 3).

El artículo cuarto de diferenciación trigonométrica también es novedoso y basado en Euler. En Agnesi y Deidier no se muestra explícitamente, pero, cuando en el año 1775 se realiza una traducción al francés del manual de Agnesi[61], el editor considera necesario insertar una *Adición*[62] con el cálculo de las cantidades angulares:

> L'Auteur de l'Ouvrage qui précéde n'ayant pas expliqué, du moins directement, la méthode pour différentier ou pour intégrer les quantités où il entre des angles, des sinus, des cosinus, &c, on a cru devoir suppléer ici à ce défaut. Un tel supplément est d'autant plus indispensable que le genre de calcul dont il s'agit, est très-fréquemment employé dans tous les Livres de Mathématique transcendante[63].

En este capítulo, el cuaderno está más en sintonía con textos como Bézout (Tabla 4) y Bails (1779) correspondientes al último tercio del siglo XVIII, donde el logaritmo, la exponencial y las cantidades de senos y cosenos se sitúan en el cálculo diferencial.

60. Su estudio independiente del cálculo integral fue obra de Euler. Así, en Bos, Henk J. M. «Newton, Leibniz y la tradición leibniziana». En Grattan-Guinness, Ivor (ed.). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial, 1984, p. 103, se afirma: «[Euler] introduce las funciones trascendentales elementales, el logaritmo, la función exponencial, las funciones trigonométricas y sus inversas sin recurrir al cálculo integral, lo que no es pequeña proeza dado que el logaritmo se consideraba tradicionalmente ligado a la cuadratura de la hipérbola y las funciones trigonométricas al cálculo de la longitud del arco de la circunferencia».

61. Agnesi, María Gaetana. *Traités élémentaires de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*. Traduits de l'italien de Mademoiselle Agnesi; avec des Additions. Paris: Chez Claude-Antoine Jombert, 1775.

62. La Adición consta de 10 páginas y posiblemente el traductor fue Pierre Thomas Antelmy (1730-1783).

63. La autora de la obra que precede no habiendo explicado, al menos directamente, el método para diferenciar o integrar las cantidades donde entran ángulos, senos, cosenos, etc., se consideró que este defecto debía ser subsanado aquí. Tal suplemento es tanto más esencial ya que el tipo de cálculo en cuestión se usa con mucha frecuencia en todos los libros de matemática trascendente.

4.2.1. Artículo 1.º: de las funciones en general[64]

El artículo tiene el mismo título que el capítulo I de la *Introductio* de Euler: *De functionibus in genere*. Consta de siete páginas y es una selección de las definiciones y comentarios que se pueden encontrar en el capítulo de Euler. Por ejemplo:

> Función de una cantidad bariable (sic) se llama la espresión analítica compuesta de cualquier modo de dicha bariable y de constantes. Así a + 2x, ax – 3x², $\overline{ax+ab}\sqrt{a^2-x^2}, c^x$ etc son todas funciones de la bariable x. Pueden ocurrir algunas funciones que solo lo son en la apariencia como $x^0, 1^x, \frac{a^2-ax}{a-x}$ etc que aunque parecen funciones de x, realmente solo son cantidades constantes[65].

Según el tipo de operaciones realizadas, las funciones se dividen en *algebraicas* y *transcendentes* y dentro de las primeras, en *racionales* e *irracionales*. Si las variables están mezcladas o no, la función es *implícita* o *explícita* respectivamente. También se realiza otra clasificación atendiendo a la resolución de las ecuaciones, así las funciones se pueden dividir en *uniformes* y *multiformes*. De este modo, la resolución de una ecuación de cualquier grado daría una *función tantiforme* cuantas fuesen las raíces o valores de la incógnita, y esto lo determina el exponente más alto.

Como se observa, en este artículo ya hay un avance hacia lo que posteriormente se convirtió en la base del cálculo: las funciones, aunque por el momento solo se limita a dar lo imprescindible y a *usarlo alguna vez*. Así pues concluye expresando:

> Esto basta acerca de las funciones en general muchas otras doctrinas importantes en este asunto y que tienen mucho uso en la Análisis sublime se hallarán en la Introducción a la Análisis de los infinitos en Leonardo Heulero (sic). Tomo 1º. Lo que hemos dicho es porque son ya comunes estos modos de hablar en los autores y nosotros usaremos de ellos alguna vez[66].

4.2.2. Artículo 2.º: De las diferenciales logarítmicas[67]

Empieza el artículo con la descripción de la curva llamada logarítmica o logística:

64. García Loygorri (1776), *op. cit.,* pp. 140-148, §§70-74.
65. García Loygorri (1776), *op. cit.,* pp. 140-141, §70.
66. García Loygorri (1776), *op. cit.,* p. 147, §74.
67. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 148-163, §§75-94.

> Su principal propiedad consiste en que las abscisas están en progresión aritmética, que empieza por cero, esto es en el punto de su origen y las ordenadas correspondientes en progresión geométrica[68].

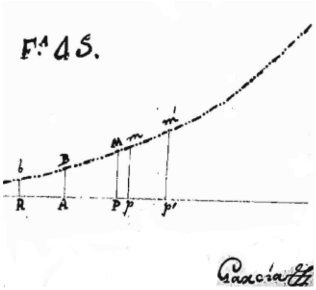


Figura 14: Figura 45 del cuaderno.

Antes de continuar con el análisis del cuaderno de García Loygorry, se hace necesario puntualizar aquí que con esta definición se obtendría en la actualidad la exponencial. Es decir, antes de la distinción que hoy manejamos sobre los dos tipos de funciones, se llamaba logarítmica a la curva obtenida al relacionar los términos de una progresión aritmética con una geométrica o viceversa. De esta forma, la figura 45 del cuaderno (Fig. 14) en la actualidad es la exponencial (al girar el gráfico se obtendría la logarítmica). Así las abscisas *AP*, *Ap*, *Ap'* son los logaritmos de sus correspondientes ordenadas *PM*, *pm*, *p'm'*.

Con la definición dada en su cuaderno, Garcia Loygorri continúa de la siguiente forma: partiendo de la expresión general de la subtangente y demostrando que en la curva logarítmica ésta es constante, obtiene $s = y\frac{dx}{dy}$, que es la ecuación de la logarítmica cuya subtangente es *s*. Si se supone $s = 1$, será $1 = y\frac{dx}{dy}$, o bien $\frac{dy}{y} = dx$, ecuación de la logarítmica cuya subtangente es 1.

A continuación indica que los logaritmos cuya subtangente –o módulo del sistema– es la unidad se denominan *neperos, naturales o hiperbolicos (sic)*, comentando que la razón de este último nombre se dará en el cálculo integral.

Después halla la diferencial del logaritmo de un número: Sea $x = L.y$ y por consiguiente $dx = d(L.y)$, si el logaritmo es hiperbólico, la ecuación de la subtangente es $dx = \frac{dy}{y}$, como $dx = d(L.y)$, se sigue que $d(L.y) = \frac{dy}{y}$. Luego la diferencial del logaritmo hiperbólico de un número es igual a la diferencial del numerador partido por el mismo número.

En cuanto a la notación del logaritmo, la mayor similitud se establece con el texto de Agnesi, ya que ambos lo designan con la letra *L* mayúscula seguida de un

68. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 148, §75.

punto (*L.*), que no era lo habitual; la notación de la *l* minúscula se encuentra más difundida, como puede verse, por ejemplo, en Deidier, Euler y Bézout.

El artículo está muy desordenado, ya que antes de dar la diferencial del logaritmo, que era su objetivo, incluye otras cuestiones como un recordatorio de las propiedades de las operaciones con logaritmos, o un apartado con la conversión de los logaritmos hiperbólicos a los de las tablas ordinarias (denominados *logaritmos de Brigs*) y viceversa[69]. Sin embargo, la explicación geométrica de la curva logarítmica y la obtención de la diferencial resulta muy interesante, máxime porque en la actualidad la derivada del logaritmo se da directamente en las correspondientes tablas de derivación sin ningún comentario sobre ella.

4.2.3. Artículo 3.º: De las diferencias de las cantidades exponenciales[70]

El artículo comienza con la siguiente definición[71]:

> Cantidades esponenciales (sic) se llaman las potencias que tienen esponentes bariables (sic), bien sea que la cantidad que está elebada (sic) a dicho esponente sea constante como a^z, bien sea que en bariable como y^z.

La diferenciación de la cantidad y^x la realiza tomando logaritmos y de este modo deduce la regla del cálculo exponencial: «La diferencial de una cantidad esponencial se halla multiplicando la cantidad esponencial por la diferencial del logaritmo de la misma cantidad»[72].

Después indica dos cuestiones a considerar, la primera es la reducción de una ecuación exponencial a logarítmica y viceversa. La segunda es que cuando el logaritmo es la unidad: $L.c = 1$, de $L.y = x$ se tendrá $L.y = xL.c$, de donde $y = c^x$, de la que afirma «que todas son ecuaciones a la misma logarítmica». Tras ello, y sin más comentarios, expresa: «Nótese que el n.º cuyo logaritmo hiperbolico (sic) es la unidad es 2.7182818»[73].

En el cuaderno, al igual que en los textos de Agnesi y Deidier, el estudio de las cantidades logarítmicas y exponenciales se apoya en la geometría pero, a diferencia de ellos, se realiza con independencia del cálculo integral. Tampoco Euler es su fuente de inspiración –ni utiliza la palabra función, ni alude a las series para la diferenciación, ni designa el número 2.7182818 por la letra *e*–. Es curioso que no figure esta letra, puesto que Euler[74] ya la había introducido en su manual.

69. Para la conversión de un sistema de logaritmos a otro tal vez se utilizara el texto de EULER (1748), *op. cit.*, p. 77, §107, que la denomina la «regla de oro de los logaritmos». Allí figura la palabra *base* en lugar de *módulo del sistema*.

70. GARCÍA LOYGORRI (1776), *op. cit.*, pp. 163-168, §§95-101.

71. GARCÍA LOYGORRI (1776), *op. cit.*, p. 163, §95.

72. GARCÍA LOYGORRI (1776), *op. cit.*, pp. 164-165, §96.

73. GARCÍA LOYGORRI (1776), *op. cit.*, p. 167, §99.

74. EULER (1748), *op. cit.*, p. 90, Cap. VI, §122.

Igualmente el número *e* ya se empleaba en otros textos contemporáneos de la época del manuscrito, como Bézout (1770) o La Caille (1772)[75] .

4.2.4. Artículo 4.º: de las diferenciales de senos y cosenos[76]

Sobre las relaciones trigonométricas, Sánchez y Valdés[77] afirman:

> Hasta la aparición del texto de Euler, las magnitudes seno y coseno eran fundamentalmente longitudes de segmentos de rectas relacionadas con una circunferencia de radio *R*. […] Euler considerará exclusivamente el círculo de radio unidad e introducirá una nueva forma de medición de ángulos: les asignará *magnitudes lineales*, precisamente la longitud del arco de circunferencia correspondiente. […] De esta manera las relaciones trigonométricas, que en su uso milenario habían puesto en correspondencia magnitudes angulares con magnitudes lineales, se convirtieron en un procedimiento que ponía en correspondencia valores numéricos con idénticas dimensiones. Así adquirieron el rango de expresiones analíticas y se convirtieron definitivamente en funciones matemáticas, transcendentes, pero elementales.

Este artículo, junto con el primero de las funciones, constituye un aspecto fundamental del manuscrito en el sentido de que se introducen las aportaciones de Euler y se sitúa más en la línea de los planteamientos de los matemáticos contemporáneos a la época de redacción del cuaderno. Es la referencia a los «[matemáticos] modernos» que escribía García Loygorri:

> Antes de dar las reglas para hallar las diferenciales de las espresiones que contienen senos y cosenos, conbiene (sic) esplicar (sic) su cálculo que se ha hecho tan familiar a los [matemáticos] modernos que no pueden leerse sus obras sin haberlo comprendido bien y estar muy bersado (sic) en él[78].

La notación que se utiliza es *sen.* para el seno, *cosen.* o *cos.* para el coseno, *T.* para la tangente, *cot.* para la cotangente, *sec.* para la secante y *cosec.* para la cosecante. Básicamente, coincide con la notación de Euler en la *Introductio* salvo en la tangente, que el matemático suizo denotaba por *tang*. Tal vez la utilización de *T.* que todavía perdura en el cuaderno sea una reminiscencia de la empleada por John Wallis (1616-1703)[79].

75. La Caille, L'Abbé de & Marie, L'Abbé. *Leçons Elémentaires de Mathématiques*. Nouvelle Edition, Augmentée de la résolution des Problèmes indéterminés […] des Principes du Calcul Différentiel & du Calcul intégral. Paris: Chez Desaint, 1772.

76. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 168-182, §§102-116.

77. Sánchez Fernández, Carlos y Valdés Castro, Concepción. *Las funciones, un paseo por su historia*. Tres Cantos (Madrid): Nivola, 2007, p. 116.

78. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 168, § 101.

79. Sobre los símbolos de las expresiones trigonométricas, Sanford, Vera. *A Short History of Mathematics*. London: Houghton Mifflin & George G. Harrap, 1958, p. 298, indica que Wallis (1693)

Después de repasar la trigonometría en una circunferencia de radio *R* –además de las expresiones anteriores también indica otras actualmente en desuso: el senoverso y el cosenoverso– se centra en la circunferencia de radio 1 e indica algunas magnitudes cuyo valor es 0, 1 o -1. De todas ellas la más sorprendente es la primera[80]:

1.º *sen.* 0 = 0 *cosen.* 0 = 1
o lo que es los mismo *sen.dx* = *dx* *cosen.dx* = 1

Esta identificación de *sen.dx* = *dx* y *cosen.dx* = 1, la realiza sin más explicaciones[81].

Para diferenciar el *sen.x*, considera que el arco *x* crecerá en cada instante o disminuirá con un aumento o disminución infinitamente pequeña: *sen.* (*x* + *dx*), desarrollando por la fórmula del seno de la suma de dos arcos consigue: *sen. xXcosen.dx* + *sen.dxXcosen.x*, siendo *cosen.dx* = 1 y *sen.dx* = *dx*, sustituyendo obtiene: *sen.* (*x* + *dx*) = *sen.x* + *dxXcosen.x*. Ahora si al seno aumentado se quita el primer *sen.x* quedará la diferencia. Esto es: *dsen.x* = *dxXcosen.x*.

De forma análoga halla la diferencial del coseno y con ellas va realizando la diferencial de la tangente, cotangente, secante y cosecante del *ángulo o arco* –ambos términos se utilizan de forma indistinta–. Nada se indica sobre las funciones inversas –arcoseno, arcocoseno, arcotangente, arcocotangente– ya introducidas por Euler en 1755 en *Institutiones Calculi Differentiallis*.

El manuscrito coincide en lo esencial con la exposición euleriana de hallar la diferencial del seno y coseno a partir de la fórmula trigonométrica de la suma de dos ángulos y aplicando en ellos las igualdades: *sin.dx* = *dx* y *cos.dx* = 1. De la misma forma se obtienen estas diferenciales en diversos manuales de la década de 1770: Bézout (1770), La Caille (1772) y en la traducción francesa de Agnesi (1775).

---

utilizó letras romanas para funciones y letras griegas para las cofunciones –en concreto, la letra *T* mayúscula para la tangente–.

80. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 171, §103.

81. En Euler, Leonhard. *Institutiones Calculi Differentiallis*. Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, 1755, p. 171, §201, se demuestra la igualdad de estos dos infinitésimos haciendo el desarrollo en serie del seno y coseno de un ángulo y despreciando en ella *los términos evanescentes*. En el cuaderno no se basa en el desarrollo en serie del seno y el coseno de un ángulo, luego el cálculo diferencial de Euler de 1755 no fue su fuente, pero con el manual de 1748 ya tiene todo lo que necesita. En el capítulo VIII de esta obra hay una gran cantidad de fórmulas trigonométricas sobre el círculo de radio unidad y en §134 se indica que si *dx* es un arco infinitamente pequeño, entonces *sin. dx* = *dx* y *cos.dx* = 1.

4.3. Capítulo 3.º: Del Cálculo Integral[82].

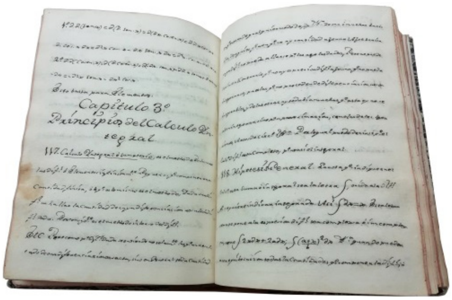


Figura 15: Fotografía propia del inicio del Capítulo 3.º (p. 182).

El estudio del cálculo integral se organiza de dos formas: una trabajando algebraicamente en términos finitos (diferenciales monomias y binomias, extendiendo sus resultados a las trinomias y quatrinomias) y la otra haciendo uso de las series, que dan la integración por aproximación. Después estos métodos se aplican a la cuadratura y rectificación de las curvas, la cubatura de los sólidos y la medición de las superficies.

4.3. Principios del Cálculo Integral[83]

La definición del cálculo integral con la que se inicia este apartado es la argumentada por Leibniz: la integral es una suma de infinitésimos y la forma de calcularla es por antiderivación. Seguidamente se establece la notación y se explica la necesidad de añadir una constante C en la resolución: $\int dx = x + C$.

4.3.1. Artículo 1.º: De las cantidades que tienen una sola variable y son integrables[84]

4.3.1.1. Diferenciales monomias[85]

> Diferenciales monomias se llaman asi (sic) a las incomplexas (sic), o de un solo termino que solo tienen una bariable (sic) x multiplicada o partida por cualesquiera constantes[86].

82. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 182-280, §§117-160.
83. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 182-185, §§117-119.
84. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 185-203, §§120-132.
85. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 185-190, §§120-124.
86. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 185, §120.

Su integración se hace por la regla fundamental: $\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + C$, donde a es una constante y m un exponente cualquiera (esto es positivo, negativo, entero o quebrado). Después de realizar algunas integrales, se hace notar la única excepción: cuando $m = -1$, entonces la expresión se convierte en: $\int x^{-1}dx$, y si se diferencia por la regla será $\frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0}$, una cantidad infinita que no permite la solución. Pero como la diferencial $x^{-1}dx$ es igual a $\frac{dx}{x}$, por lo estudiado anteriormente en la diferencial de los logaritmos deduce que el logaritmo hiperbólico de x es la integral de esta expresión.

Termina este apartado con lo que hoy en día se denominan propiedades de la integral indefinida: la linealidad y el producto por una constante. En el cuaderno se refieren dos casos:

1.º: $\int dy = \int(adx + bxdx + cx^2dx\ etc) = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3}\ etc + C = y$.

2.º: $\int \frac{ax^m dx + bx^n dx}{C} = \frac{\frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1}}{C}$.

4.3.1.2. Diferenciales binomias[87]

> Llamamos diferencial binomia a aquella en quien la cantidad compleja que entra en la espresión (sic) es una potencia cualquiera de un binomio. Así $ex^n dx(a + bx^m)^p$ es diferencial binomia[88].

A continuación se establece en qué condiciones de los parámetros n, m y p la diferencial binomia es integrable finita y exacta. Se analizan varios casos y se da algún ejemplo sobre su aplicación. Finalmente concluye que si la diferencial binomia no se halla en alguna de las formas explicadas es inútil buscar una integración puramente algebraica.

También se ven algunos casos (muy pocos) de diferenciales trinomias o quatrinomias –aquellas en las que la cantidad compleja contiene 3 o 4 términos–.

Con esto concluye el artículo 1.º del estudio de la integral indefinida de forma algebraica. El estudio de las diferenciales binomias es perfectamente comprensible porque se ajusta a las ecuaciones de las cónicas, pero se podrían haber considerado más métodos de integración. Por ejemplo, no figuran ni el método de integración por partes –presente en el tratado de Bougainville (1754)–[89] ni el

87. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 190-203, §§125-132.
88. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 190, §124.
89. Bougainville, Louis-Antoine de. *Traité du calcul intégral pour servir de suite à l'Analyse des Infiniment Petits de M. Le Marquis de L'Hôpital*. Paris: chez Guérin et Delatour, 1754, tome I, p. 286.

de las fracciones racionales –en el tratado de Reyneau (1738)–[90] estando ya ambos métodos en las obras de Jean Bernouilli (1667-1748)[91].

Sobre qué textos pudieron ser fuentes para la redacción de este artículo del manuscrito, está claro que la coincidencia mayor es con el tratado de Bézout (1770). Como puede observarse en su índice (Tabla 4), los primeros capítulos del cálculo integral se dedican a las diferenciales monomias y binomias, aunque los ejemplos utilizados para ilustrar los contenidos son diferentes.

4.3.2. Artículo 2.º: Uso del cálculo integral para hallar la cuadratura y rectificación de las curvas[92]

Lo primero que se explica es que cuadrar una curva es hallar el área o espacio contenido entre el perímetro de la curva y otras líneas cualesquiera. Estas áreas o espacios hallados unas veces son exactamente iguales al espacio curvilíneo dado y en ese caso la cuadratura es exacta (ya que se puede reducir a un cuadrado por la geometría) y otras veces solo aproximadamente iguales, porque deben hallarse por aproximación mediante una serie.

Después plantea y demuestra geométricamente que en una curva cualquiera con las ordenadas perpendiculares a las abscisas, la diferencial del área finita es igual al pequeño rectángulo ydx que se forma cuando la diferencial de las abscisas es infinitamente pequeña o se desvanece. Razonando a continuación que como $\int ydx$ representa la suma de estas diferenciales o elementos, $\int ydx$ representa el área o cuadratura de la curva. Al resolver esta integral nos saldrá la constante C que, por las condiciones del problema, será preciso determinar para obtener el área en cuestión.

4.3.2.1. Regla para la determinación de la constante C [93]

La explicación de cómo determinar la constante C es particularmente interesante porque en realidad es lo que hoy en día denominamos integral definida, sin la facilidad de nuestra actual notación con los límites arriba y abajo del signo integral[94] y la aplicación de la regla de Barrow.

Para la visualización concreta del proceso se aportan –con sus figuras correspondientes– cinco ejemplos: tres con la parábola, el cuarto con una curva

90. REYNEAU, Charles René. *Analyse démontrée*. Paris: chez Quillau, 1738, tome II, p. 335.

91. Información obtenida en LUBET, Jean-Pierre. «Le calcul différentiel et intégral dans l'Analyse démontrée de Charles René Reyneau». *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 2005, 38, p. 167.

92. GARCÍA LOYGORRI (1776), *op. cit.*, pp. 203-269, §§133-156.

93. GARCÍA LOYGORRI (1776), *op. cit.*, pp. 208-227, §§137-140.

94. La notación moderna de la integral definida la usó por primera vez Joseph Fourier en las *Mémoires* de la Academia Francesa (*ca.* 1819-20).

polinómica y el quinto trata las infinitas hipérbolas referidas a las asíntotas. Tras ello se afirma que la parábola es la única de las cónicas cuya cuadratura es exacta.

Precisamente en la cuadratura de infinitas hipérbolas referidas a las asíntotas se remite a los matemáticos Wallis y Varignon. Partiendo de la ecuación que las representa, $a^{m+n} = x^n y^m$, se toma para mayor simplicidad $a^{m+n} = 1$, luego $1 = x^n y^m$; del análisis de los valores de m y n se obtienen tres casos, a saber, $m > n$, $m < n$ y $m = n$. En la clasificación de estos se sigue a Varignon, no a Wallis –quien en su *Aritmética de los infinitos* distinguía estos espacios como finito, infinito y más que infinito– razonando la elección[95]:

> El Sr. Varignon en las Memorias de la Academia de 1706 ha demostrado esta equibocación (sic) de Wallis y la diferencia que hay de una clase de hiperbolas (sic) a otra, en los 3 casos arriba dichos respecto al rumbo que siguen con relación a sus asintotas (sic).

4.3.2.2. Cuadraturas por aproximación[96]

En este apartado se plantea cuadrar un área en los casos en que no se puede hallar la integral exacta. La forma de realizarlo es por aproximación mediante una serie infinita decreciente que sea convergente. Esta transformación de la expresión en una serie se hace aplicando el teorema newtoniano en la división de fracciones o en la extracción de raíces. Antes de aplicar el método de la integral por aproximación, se indican algunas cuestiones sobre las series infinitas.

De todo el cuaderno, es en esta parte donde se cita el trabajo de mayor número de matemáticos del siglo XVIII. Así, para el estudio de la convergencia de las series, se remite a las demostraciones de Varignon en las *Memorias* de la Academia de Ciencias francesa[97]. También se indica que para las series que resultan de fracciones el uso de las reglas generales de la división conlleva operaciones largas y tediosas, que pueden evitarse mediante la utilización de un método más simple y expedito que consiste en hallar una serie de potencias. Para una explicación detallada de este procedimiento se remite al *Análisis de las líneas curvas* de Cramer y a la *Introducción de la Análisis de los infinitos* de Euler[98]. Para las reglas de la suma de series se refiere a las obras «de los Bernoullis, Jacobo y Juan», a «Estirling» (sic) y a «Ricarti» (sic)[99]. También Agnesi[100] remite al texto «De *Seriebus infinitis* de Giacomo Bernulli» para la suma de las series.

95. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 226, §140.
96. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 227-253, §§141-149.
97. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 233, §143.
98. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 234, §144.
99. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 242, §145.
100. Agnesi (1748), *op. cit.*, p. 708, §73.

Por último, se explica el *método inverso o retorno de las series*. Es decir, si se supone una ecuación $x = ay^m + by^{m+n} + cy^{m+2n} + dy^{m+3n}$ *etc.* el método indica cómo hallar el valor de y en expresión de x. Bézout[101] también expone este procedimiento y, para mayor extensión, remite a las obras de Newton y a *l'Analyse des lignes courbes* de Cramer.

Tras este breve estudio sobre las series, se pasa a su aplicación a las cuadraturas por aproximación. Como se ha indicado, la parábola es la única cónica cuadrable –la hipérbola obviamente no lo es– y ahora, por aproximación, realiza las otras dos cuadraturas: la del círculo y la de la elipse.

En la del círculo, que obtiene por la serie newtoniana y leibniziana, observa que la primera converge más rápidamente que la segunda. El cálculo del área del círculo de estas dos formas está presente en los libros de texto con los que se viene comparando el manuscrito –Deidier, Agnesi, Bézout–. Con quien presenta mayor similitud es con el texto de la matemática italiana, que es además la única que atribuye expresamente a Leibniz la segunda serie y comenta que se encuentra en las Actas de Leipzig del año 1682[102].

Para la cuadratura de la elipse apoloniana, $y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, se aplica el teorema de Newton para hallar la serie correspondiente, de cuya integración se obtiene el área del segmento elíptico. Seguidamente, relaciona la elipse con el círculo comparando los valores de a y b, un método habitual en los libros de texto ya indicados.

4.3.2.3. De la rectificación de los arcos de las curvas[103]

En primer lugar se enuncia que rectificar una curva o arco es hallar una recta igual al perímetro de la curva o del arco. Volviendo de nuevo a la concepción leibniziana de una curva como un polígono infiniquilátero de lados infinitamente pequeños, la rectificación consistirá en hallar el elemento del arco, esto es, el lado infinitamente pequeño del polígono cuya integral o suma será el arco o perímetro que se busca. De este modo, si el arco es v su diferencial o arco infinitamente pequeño dv tendrá por expresión la hipotenusa del triángulo diferencial cuyos lados son dx, dy.

Seguidamente presenta varios ejemplos. El primero consiste en rectificar la parábola apoloniana ($y^2 = ax$), obteniendo la serie: $y + \frac{2}{3}\frac{y^3}{a^2} - \frac{2}{5}\frac{y^5}{a^4} + \frac{4}{7}\frac{y^7}{a^6} - \frac{10}{9}\frac{y^9}{a^8} +$ *etc*. En el segundo se rectifica la parábola del tercer género ($ax^2 = y^3$), suponiendo

101. Bézout (1770), *op. cit.*, pp. 163-164, §116.
102. Agnesi (1748), *op. cit.*, p. 743, §97.
103. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 254-269, §§150-156.

el parámetro igual a 1 resuelve la integral exacta obtenida mediante un cambio variable y determina la constante de integración $C = -\frac{8}{27}$.

El tercer y último ejemplo abordado es la rectificación del círculo. En el cuaderno se indican dos procedimientos para su resolución, una mediante el seno de un arco (con resultado $y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7$ *etc.*), la otra conociendo el coseno del arco. Adicionalmente indica que también puede hallarse la longitud del arco por el senoverso y por la tangente. Con la serie que ha calculado deduce que la longitud del círculo cuyo diámetro es 1 es igual a 3,14115. Sobre este dato hace la referencia siguiente:

> De modo que siendo el diámetro 1,00000 la periferia será próximamente que conbiene (sic) en las 4, 1as notas, 3,14115 con la que hallo Ludolfo de Seulem[104] (sic). La razón de no conbenir (sic) con la de dicho Seulem (sic) en mayor número de notas es porque la serie que hemos tomado no es bastante convergente; y así hallando otra más convergente se le ajustaría en mayor número de notas[105].

Los textos de Agnesi, Deidier y Bézout también contienen el cálculo de la longitud de un arco de circunferencia, pero es Bézout el único que, al igual que García Loygorri, realiza el cálculo de la longitud de la circunferencia de diámetro 1. No obstante, el matemático francés calcula la serie a través de la tangente y consigue una aproximación mucho mejor –3,1415926536–, que es exacta hasta la décima cifra.

4.3.3. Artículo 3.º: Uso del cálculo integral para cubar los sólidos y medir las superficies[106]

En primer lugar aparece la definición de cubar un sólido, que consiste en medir su *solidez*, que hallada de una forma exacta o aproximada se puede reducir a un cubo. Para poder calcular este volumen, el sólido estará formado de la manera siguiente:

- Por la rotación y revolución de una sección o figura plana alrededor de un eje.
- O bien compuesto de elementos sólidos infinitamente pequeños formados por las secciones o planos paralelos.

104. Ludolph van Ceulen (1540-1610) fue un matemático alemán famoso por haber calculado el valor del número pi (π) con una aproximación de 35 cifras decimales. Véase O'CONNOR, John J. y ROBERTSON, Edmund F. «Ludolph van Ceulen». En *MacTutor History of Mathematics archive*. Saint Andrews: School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, 2009.

105. GARCÍA LOYGORRI (1776), *op. cit.,* p. 269, §156.

106. GARCÍA LOYGORRI (1776), *op. cit.*, pp. 269-280, §§157-160.

Con el primer método obtiene la fórmula del actual volumen de revolución en torno al eje OX, pero en vez de poner π escribe la razón de la semiperiferia al radio $\frac{p}{2r}$.

A continuación se dan tres ejemplos de volumen de revolución: el cono, la esfera –o una parte de ella– y el volumen de un *esfero elíptico*[107] producido por la revolución de una semielipse apoloniana alrededor del eje mayor.

En el segundo método que considera para el cálculo del volumen, por secciones, realiza el ejemplo de la pirámide[108] de un modo semejante al texto de Bézout[109], en cambio este ejemplo no aparece ni en Agnesi ni en Deidier.

4.3.3.1. De las superficies de los sólidos[110]

Se trata de calcular la superficie de revolución obtenida al girar una línea (recta o curva) alrededor del eje. Su fórmula es: $\frac{py}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$, donde $\frac{py}{r}$ es la periferia del círculo de revolución cuyo radio es *y*, siendo $\sqrt{dx^2+dy^2}$ la diferencial de la longitud del arco o línea que revoluciona.

Seguidamente muestra un ejemplo, con su figura correspondiente, que consiste en hallar la superficie de un cono parabólico o paraboloide formado por la revolución de una parábola apoloniana alrededor de su eje, que resulta ser $\frac{p(4y^2+a^2)}{12ar}(4y^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{pa^2}{12r}$. Este es un ejemplo muy sencillo también resuelto por los autores aquí considerados.

5. Conclusiones

Es prácticamente seguro que el manuscrito de García Loygorri (1776) se corresponde con el tratado de cálculo diferencial e integral que Cipriano Vimercati realizó para la enseñanza en el Colegio de Artillería de Segovia. Se trata de material de gran valor histórico porque proporciona información detallada sobre los contenidos impartidos y muestra la influencia de determinados textos de cálculo infinitesimal europeos.

Es un cálculo leibniziano, que trata las curvas –sobre todo las cónicas– con la utilización de las ordenadas paralelas y perpendiculares al eje de las abscisas. En alguna ocasión considera otras curvas algebraicas o transcendentes (cicloide) y trabaja con ordenadas polares u oblicuas.

107. O elipsoide de revolución como se conoce en la actualidad.
108. García Loygorri (1776), *op. cit.*, p. 277, §159.
109. Bézout (1770), *op. cit.,* pp. 130-131, §101.
110. García Loygorri (1776), *op. cit.*, pp. 277-280, §160.

Los contenidos del primer capítulo sobre el cálculo diferencial son los habituales que pueden encontrarse en los libros de texto que continúan la estela marcada por el primer manual de cálculo de l'Hôpital (1696). En concreto, Agnesi (1748) y Deidier (1740) fueron las principales fuentes utilizadas.

El segundo capítulo es el más novedoso: trata las funciones y la diferenciación de las razones trigonométricas. Sus fuentes son más avanzadas y, aunque para la diferenciación logarítmica utiliza la geometría, no recurre al cálculo integral como ocurría en las fuentes anteriormente mencionadas. El texto más claramente utilizado en este capítulo es el de Euler (1748).

El tercer capítulo de integración, aunque resulta un poco parco en métodos ya difundidos en la época en que García Loygorri escribió el cuaderno, contiene lo esencial para trabajar de forma exacta y aproximada en el cálculo de la cuadratura y rectificación de las curvas y en la cubatura y superficie de los sólidos. Posiblemente su fuente principal fue Bézout (1770).

Teniendo en cuenta las limitaciones que supone el dictado y que según García Loygorri su enseñanza se extendió a un poco más de cuatro meses, el manuscrito muestra un contenido bastante considerable que permitía adquirir los elementos esenciales del cálculo infinitesimal.

En cuanto a Vimercati, responsable del contenido del manuscrito y de la enseñanza en el Colegio, cabe destacar que no se apropia de otro manual, sino que muestra cómo a medida que elabora los capítulos del manuscrito se apoya en libros de texto europeos más avanzados y más recientes.

6. Agradecimientos

Agradezco a Carlos Béltran Velamazán su colaboración con el tratamiento digital de las imágenes.

7. Bibliografía

7.1. Fuentes manuscritas

García Loygorri, Martín. *Elementos del Algebra o Analisis Mathematica. Parte 3.ª. De la Analisis de los Infinitamente Pequeños*. Manuscrito. Biblioteca Central Militar. Signatura: MS-440. 1776.

7.2. Referencias bibliográficas

Agnesi, María Gaetana. *Instituzioni Analitiche*, tomo II. Milano: Nella Regia-Ducal Corte, 1748.

Agnesi, María Gaetana. *Traités élémentaires de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Traduits de l'italien de Mademoiselle Agnesi; avec des Additions*. Paris: Chez Claude-Antoine Jombert, 1775.

ALFONSI, Liliane. *Étienne Bézout (1730-1783). Mathématicien des Lumières*. Paris: L'Harmattan, 2011.

BAILS, Benito. *Elementos de Matemática*, tomo III. Madrid: Imprenta de D. Joaquín Ibarra, 1779.

BÉZOUT, Étienne. *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*. Quatrieme partie: Contenant les principes généraux de la Méchanique, précédés des Principes de Calcul qui servent d'introduction aux Sciences Physico-Mathématiques. Paris: Chez J. B. G. Musier fils, 1770.

BLANCO ABELLÁN, Mónica. «El método de las fluxiones en la Academia de Matemáticas del Cuartel de Guardias de Corps: una revisión sobre el Curso Militar de Mathematicas de Pedro Padilla (1753-1756)». En URKÍA, José M.ª (ed.). *XI Congreso de la SEHCYT*. San Sebastián: Publidisa, 2012, pp. 385-395.

BLANCO, Mónica y BRUNEAU, Oliver (eds.). «Les mathématiques dans les écoles militaires (XVIIIe-XIXe siècles)»**.** *Philosophia Scientiæ*, 2020, 24(1). https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.2122.

BOS, Henk J. M. «Newton, Leibniz y la tradición leibniziana». En GRATTAN-GUINNESS, Ivor (ed.). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial, 1984, pp. 69-124. Versión española de MARTÍNEZ PÉREZ, Mariano.

BOUGAINVILLE, Louis-Antoine de. *Traité du calcul intégral pour servir de suite à l'Analyse des Infiniment Petits de M. Le Marquis de L'Hôpital*, tome I. Paris: chez Guérin et Delatour, 1754.

DEIDIER, L'Abbé. *Le calcul différentiel et le calcul intégral, expliqués et appliques à la géométrie. Avec un Traité Preliminaire contenant la manière de resoudre* […]. Paris: Chez Charles-Antoine Jombert, 1740.

EULER, Leonhard. *Introductio in Analysin Infinitorum*, tomo I. Lausanne: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, 1748.

EULER, Leonhard. *Institutiones Calculi Differentiallis*. Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, 1755.

FERMAT, Pierre de. *Œuvres de Fermat*. Publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'Instruction Publique. Tome Premier. Paris: Gauthier-Villars, 1891.

FERRARO, Giovanni. «Differentials and differential coefficients in the Eulerian foundations of the calculus». *Historia Mathematica*, 2004, 31, pp. 34-61.

Gaceta de Madrid, 18 de septiembre de 1770. PDF (Referencia BOE-A-1770-525) https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1770/038/A00323-00324.pdf (Consultado el 23-03-2020).

HERRERO FERNÁNDEZ-QUESADA, María Dolores. *El Real Colegio de Artillería de Segovia*. Segovia: Academia de Artillería de Segovia, 1990.

HORMIGÓN, Mariano. «Las matemáticas en la Ilustración española. Su desarrollo en el reinado de Carlos III». En FERNÁNDEZ PÉREZ, Joaquín y GONZÁLEZ TASCÓN, Ignacio (eds.). *Ciencia, Técnica y Estado en la España Ilustrada*. Zaragoza: MEC/SEHCYT, 1990, pp. 265-278.

LA CAILLE, L'Abbé de & MARIE, L'Abbé. *Leçons Elémentaires de Mathématiques*. Nouvelle Edition, Augmentée de la résolution des Problèmes indéterminés […] des Principes du Calcul Différentiel & du Calcul intégral. Paris: Chez Desaint, 1772.

L'Hôpital, Guillaume F. A. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. 2.ᵉ édition. Paris: Chez Etienne Papillon, 1716. Su primera edición es de 1696.

La Llave, Pedro de. *Biografía del Excmo. Sr. D. Martín García Loigorri, Teniente General del Ejército y Director General que fue de Artillería*. Madrid: Imprenta del Cuerpo de Artillería, 1887, 31 pp.

Lubet, Jean-Pierre. «Le calcul différentiel et intégral dans l'Analyse démontrée de Charles René Reyneau». *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 2005, 38. DOI: 10.4000/rde.304. http://journals.openedition.org/rde/304 (Consultado el 22-06-2020).

Mazzotti, Massimo. *The World of Maria Gaetana Agnesi, Mathematician of God*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2007.

Navarro Loidi, Juan. «La incorporación del cálculo diferencial e integral al Colegio de Artillería de Segovia». *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 2013, 36(78), pp. 333-358.

O'Connor, John J. y Robertson, Edmund F. «Ludolph van Ceulen». En *MacTutor History of Mathematics archive*. Saint Andrews: School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, 2009.
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Van_Ceulen/ (Consultado el 23-9-2020).

Ordenanza de S. M. para el Real Colegio Militar de Caballeros Cadetes de Segovia, 1798. http://bibliotecadigital.jcyl.es/es/consulta/registro.cmd?id=12010 (Consultado el 23-2-2020).

Padilla Arcos, Pedro. *Curso Militar de Mathematicas sobre las partes de estas Ciencias, pertenecientes al Arte de la Guerra, para el uso de la Real Academia, establecida en el Quartel de Guardias de Corps*. Tomo IV. Tratado V: *De los Calculos Diferencial, è Integral, ò méthodo de las Fluxiones*. Madrid: Imprenta de Antonio Marín, 1756.

Pérez Ruiz, Pedro Antonio. *Biografía del Colegio-Academia de Artillería de Segovia*. Segovia: Imprenta de «El Adelantado», 1960.

Quirós Montero, Diego. *Labor Social de los Hijos del Colegio/Academia de Artillería*. Segovia: Patronato del Alcázar de Segovia, 2016, 398 pp.

Reyneau, Charles René. *Analyse démontrée*, tome II. Paris: chez Quillau, 1738.

Sánchez Fernández, Carlos y Valdés Castro, Concepción. *Las funciones, un paseo por su historia*. Tres Cantos (Madrid): Nivola, 2007.

Sanford, Vera. *A Short History of Mathematics*. London: Houghton Mifflin & George G. Harrap, 1958.

Vigón, Jorge. *Historia de la Artillería Española*, tomo II. Madrid: CSIC, 1947.

VV. AA. *Los artilleros del Real Colegio de Artillería en el Alcázar de Segovia durante el reinado de Carlos III*. Segovia: Patronato del Alcázar de Segovia, 1988.

8. Anexo

Tabla 2: Índice del Tomo II de Agnesi[111]

AGNESI (1748): *INSTITUZIONI ANALITICHE*. TOMO II 586 pp.* + 23 láminas correspondientes a los libros II y III			
LIBROS	**CAPÍTULOS**	**PP.**	**PP. (%)**
1. LIBRO SEGUNDO: DEL CÁLCULO DIFERENCIAL	Introducción	1	179 (30.6 %)
	1: Idea de las diferenciales de diferentes órdenes y su cálculo	39	
	2: Del método de las tangentes	56	
	3: El método de los máximos y mínimos	27	
	4: De los puntos de inflexión contraria y de regreso	21	
	5: De las evolutas y los radios osculadores	35	
2. LIBRO TERCERO: DEL CÁLCULO INTEGRAL	Introducción	1	234 (39.9 %)
	1: De las reglas de integración expresadas por fórmulas algebraicas finitas, o reducidas a las cuadraturas supuestas conocidas de las curvas	87	
	2: De las reglas de integración haciendo uso de las series	10	
	3: Del uso de las reglas antes mencionadas en la rectificación de curvas, cuadratura de espacios, medida de superficies y cubatura de sólidos	109	
	4: Del cálculo de cantidades logarítmicas y exponenciales	27	
3. LIBRO CUARTO: DEL MÉTODO INVERSO DE LAS TANGENTES	Estudio de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo grado	173	173 (29.5%)

111. El índice se indica en Agnesi en el tomo I de *Instituzioni Analitiche* (1748).

Tabla 3: Índice del texto del Padre Deidier

<table>
<tr><th colspan="4">L’Abbé DEIDIER (1740): LE CALCUL DIFFERENTIEL ET LE CALCUL INTEGRAL EXPLIQUÉS ET APPLIQUÉS À LA GEOMETRIE.
507 pp.* + 10 láminas del tratado preliminar y 16 del cálculo diferencial e integral</th></tr>
<tr><th>LIBROS</th><th>CAPÍTULOS</th><th>PP.</th><th>PP. (%)</th></tr>
<tr><td>1. LIBRO PRIMERO: TRATADO PRELIMINAR</td><td>Contiene la forma de resolver ecuaciones de cualquier grado, las propiedades de las series, las ecuaciones que expresan la naturaleza de las curvas, los lugares geométricos, la construcción geométrica de ecuaciones y la solución de problemas determinados e indeterminados</td><td>226</td><td>226 (44.6 %)</td></tr>
<tr><td rowspan="7">2. LIBRO SEGUNDO: DEL CÁLCULO DIFERENCIAL</td><td>1: Principios de cálculo diferencial</td><td>12</td><td rowspan="7">162 (31.9 %)</td></tr>
<tr><td>2: Uso del cálculo diferencial para encontrar tangentes, subtangentes, normales, subnormales y asíntotas de las curvas</td><td>38</td></tr>
<tr><td>3: Uso de cálculo diferencial para resolver problemas de máximos y mínimos</td><td>25</td></tr>
<tr><td>4: Del cálculo de las diferenciales segundas y terceras y de su uso para encontrar los puntos de inflexión y de retorno de las curvas</td><td>26</td></tr>
<tr><td>5: Uso del cálculo diferencial para encontrar los radios de curvatura</td><td>25</td></tr>
<tr><td>6: Uso del cálculo diferencial en la reflexión y la refracción</td><td>23</td></tr>
<tr><td>Pequeño tratado sobre epicicloides</td><td>13</td></tr>
</table>

L'Abbé DEIDIER (1740): *LE CALCUL DIFFERENTIEL ET LE CALCUL INTEGRAL EXPLIQUÉS ET APPLIQUÉS À LA GEOMETRIE.* 507 pp.* + 10 láminas del tratado preliminar y 16 del cálculo diferencial e integral			
LIBROS	**CAPÍTULOS**	**PP.**	**PP. (%)**
3. LIBRO TERCERO: DEL CÁLCULO INTEGRAL	1: Reglas del cálculo integral	11	119 (23.5 %)
	2: Uso del cálculo integral para la cuadratura de las superficies planas curvilíneas	25	
	3: Uso del cálculo integral para la rectificación de las curvas	13	
	4: Uso del cálculo integral para la cubatura de los sólidos y la cuadratura de sus superficies	15	
	5: Uso del cálculo integral para encontrar los centros de gravedad de las líneas, superficies y cuerpos	24	
	6: Uso del cálculo integral para encontrar los centros de percusión de los cuerpos en movimiento	13	
	7: Uso del cálculo integral por el método inverso de tangentes	8	
	8: Uso del cálculo integral para encontrar los logaritmos	5	
	9: Uso del cálculo integral para cantidades exponenciales.	7	

Tabla 4: Índice del texto Bézout (1770)

<table>
<tr><td colspan="3">BÉZOUT, E. (1770): COURS DE MATHEMATIQUES À L'USAGE DES GARDES DU PAVILLON ET DE LA MARINE. TOMO IV: Principios generales de la Mecánica, precedidos de los Principios de Cálculo que sirven de introducción a las Ciencias Físico-Matemáticas.
432 pp.* + 2 láminas de cálculo y 3 de mecánica</td></tr>
<tr><th>MATERIAS</th><th>PP.</th><th>PP. (%)</th></tr>
<tr><td>Nociones preliminares</td><td>11</td><td>11 (2.5 %)</td></tr>
<tr><td>ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL</td><td>9</td><td rowspan="10">86 (19.9 %)</td></tr>
<tr><td>De las diferenciales segundas, terceras</td><td>4</td></tr>
<tr><td>De las diferenciales de senos, cosenos, diferenciales logarítmicas y cantidades exponenciales</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Aplicación a las subtangentes, tangentes, subnormales de las líneas curvas</td><td>22</td></tr>
<tr><td>Aplicación a los límites de las curva y en general a los límites de las cantidades y a las cuestiones de máximos y mínimos</td><td>23</td></tr>
<tr><td>De los puntos múltiples</td><td>7</td></tr>
<tr><td>De los puntos de inflexión visibles e invisibles</td><td>6</td></tr>
<tr><td>De los puntos de regreso</td><td>1</td></tr>
<tr><td>De los radios de curvatura</td><td>4</td></tr>
<tr><td>ELEMENTOS DEL CÁLCULO INTEGRAL</td><td>2</td><td rowspan="6">135 (31.3 %)</td></tr>
<tr><td>De las diferenciales de una única variable que tienen una integral algebraica; en primer lugar de las diferenciales monomias</td><td>3</td></tr>
<tr><td>De las diferenciales complejas cuya integración se ajusta a las reglas fundamentales</td><td>4</td></tr>
<tr><td>De las diferenciales binomias que pueden integrarse algebraicamente</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Aplicación de las reglas precedentes a la cuadratura de las curvas</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Aplicación a la rectificación de las curvas</td><td>2</td></tr>
</table>

BÉZOUT, E. (1770): *COURS DE MATHEMATIQUES À L'USAGE DES GARDES DU PAVILLON ET DE LA MARINE.* TOMO IV: *PRINCIPIOS GENERALES DE LA MECÁNICA, PRECEDIDOS DE LOS PRINCIPIOS DE CÁLCULO QUE SIRVEN DE INTRODUCCIÓN A LAS CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.* 432 PP.* + 2 LÁMINAS DE CÁLCULO Y 3 DE MECÁNICA		
MATERIAS	**PP.**	**PP. (%)**
Aplicación a las superficies curvas	3	135 (31.3 %)
Aplicación a la medición de la solidez	14	
De la integración de cantidades que contienen senos, cosenos…	2	
De la manera de integrar por aproximación, algunos usos de este método	19	
Utilización de las aproximaciones precedentes para la integración de diversas cantidades	23	
Cómo reducir, en la medida de lo posible, la integración de una diferencial propuesta a la de otra conocida, distinguir los casos en los que sea posible	4	
De las fracciones racionales	8	
De algunas transformaciones que pueden facilitar la integración	3	
De la integración de las cantidades exponenciales	1	
De la integración de las cantidades de dos o más número de variables	4	
De las ecuaciones diferenciales	14	
De las ecuaciones diferenciales de segundo, tercer orden…	11	
PRINCIPIOS GENERALES DE LA MECÁNICA	200	200 (46.3 %)

* El cómputo total de páginas no incluye índice, prefacio, ni páginas en blanco.