ISSN: 0213-3563

TEORÍA DE MODELOS O LA VENGANZA DE PEACOCK

Model Theory as Peacock's Revenge

Wilfrid HODGES*
University of London, w.hodges@qmul.ac.uk

BIBLID [(0213-356)8,2006,35-52]

Fecha de aceptación definitiva: 12 de marzo de 2006

RESUMEN

La teoría de modelos se basa en el concepto de interpretación de los signos matemáticos de forma que sean verdaderas ciertas fórmulas. George Peacok introdujo este concepto en 1834, como parte del debate sobre la manera de extender la matemática de los números enteros y naturales al análisis de los números reales y complejos. Él observaba la matemática «desde fuera», pero a mediados del siglo XX las ideas que él introdujo reaparecieron en una colección de teoremas matemáticos que constituyeron la base de una nueva disciplina matemática, la teoría de modelos.

Trazamos las líneas principales de la teoría de modelos hasta los trabajos recientes en donde se retoma el punto de vista de Peacock y se otorga una posición privilegiada a los sistemas numéricos de la matemática clásica.

Palabras clave: Peacock, simbólico, interpretación, teoría de modelos, estructura, ecuación, fórmula, aritmética, números complejos.

ABSTRACT

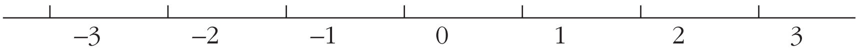
Model theory rests on the notion of interpreting mathematical symbols so as to make given formulas true. George Peacock introduced this notion in 1834, as part of the debate about how to extend mathematics from the arithmetic of natural numbers to real and complex analysis. He discussed mathematics «from the outside»; but by the mid twentieth century the ideas that he introduced had reappeared in enough

* Traducción del inglés a cargo de Julio Ostalé García, revisada por María Manzano Arjona.

mathematical theorems to form the basis of the new mathematical discipline of model theory. We trace the main lines of model theory, up to recent work which returns to Peacock's view by giving central place to the number systems of classical mathematics.

Key words: Peacock, symbolical, interpretation, model theory, structure, equation, formula, arithmetic, complex numbers.

Si has estudiado cálculo con un manual universitario americano, habrás visto con toda seguridad el diagrama:



El diagrama representa a los números reales (o en otras palabras los números con expansión decimal), dispuestos en un orden de menor a mayor. Los libros de texto más exigentes añaden algún número más al diagrama, como por ejemplo e un poco a la izquierda del 3 y π un poco a su derecha. Estos dos números son irracionales; en otras palabras, no pueden ser escritos como m/n donde m y n son enteros. Probablemente el primer número irracional descubierto fuera $\sqrt{2}$, la raíz cuadrada de 2, en algún lugar del diagrama entre el 1 y el 2. Los matemáticos medievales consideraron que los números irracionales eran algo marginal y utilizaron para ellos nombres insultantes como «surd», que es la palabra latina para sordomudo.

Hace mucho tiempo que se sabe que los números reales negativos no tienen raíces cuadradas que sean reales; por ejemplo ningún número real es una solución para la ecuación $x^2+1=0$. En 1545 Girolamo Cardano publicó una fórmula para calcular las soluciones de las ecuaciones cúbicas. La ecuación cúbica:

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

tiene soluciones $x = 2$, 1 y –3, pero la regla de Cardano para solucionarla requiere usar la raíz cuadrada de –60 durante la computación. No se trata de un caso especial; la regla de Cardano emplea raíces cuadradas de números negativos siempre que la cúbica tiene tres raíces reales distintas. Las raíces cuadradas de números negativos eran incluso más sospechosas que los números irracionales, así es que se les conoció como «imaginarios». Mas la regla de Cardano mostraba que eran necesarios.

A finales del siglo dieciocho los matemáticos habían desarrollado procedimientos interesantes para tratar los números imaginarios. Consideraban números complejos $a + b\sqrt{-1}$ donde a y b son reales. Sabían cómo sumar, multiplicar y dividir números complejos, y cómo representarlos en el plano. Cotes y Euler habían establecido algunas leyes referidas a tales números, como por ejemplo:

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$$

Cauchy estuvo a punto de extender el cálculo integral y diferencial a los números complejos, y mostraría que este cálculo extendido ofrece métodos poderosos para tratar los propios números reales.

No todo el mundo estaba satisfecho con estos desarrollos. Si –1 no tiene raíz cuadrada, entonces toda la teoría de los números complejos está basada en un engaño. Hubo quienes (por ejemplo William Frend, suegro de Augustus De Morgan) aprovecharon la oportunidad para señalar que no se puede sacar algo a partir de la nada, así es que los números negativos eran también un engaño. ¿Cómo contestar a estas objeciones?

* * *

En 1834 George Peacock [10] propuso una respuesta. A diferencia de matemáticos anteriores, él no distinguía entre números que existen y números que no. En lugar de eso, él distinguía entre símbolos por un lado y sus interpretaciones por otro. El símbolo 1 es precisamente una marca; generalmente la interpretamos como refiriendo al número uno. Esta es una distinción sutil, dado que tanto el símbolo como el número se escriben de la misma manera. Pero el resto de nuestra historia dependerá de ello.

He aquí una de las observaciones de Peacock sobre esta distinción:

> *Definir* es asignar de antemano el significado o condiciones de un término u operación; interpretar es determinar el significado de un término u operación conforme a definiciones o a condiciones previamente dadas o asignadas. Es por esta razón que *definimos* operaciones en aritmética y álgebra aritmetizada conforme a su significado corriente, y las *interpretamos* en álgebra simbólica conforme a las condiciones simbólicas a las cuales están sujetas ([10] p. 197 nota al pie).

¿Qué es lo que está diciendo Peacock aquí? ¿Qué quiere decir con «de antemano» y «previamente»?

La idea de Peacock es como sigue. Tenemos los números naturales 0, 1, 2… y podemos introducir símbolos que representan números naturales y operaciones sobre números naturales. Entonces podemos usar estos símbolos para escribir leyes (las «condiciones» de Peacock) que son verdaderas respecto a los números naturales. Por ejemplo $x + y = y + x$; cuando sumamos dos números naturales, el orden no importa. Otra ley es:

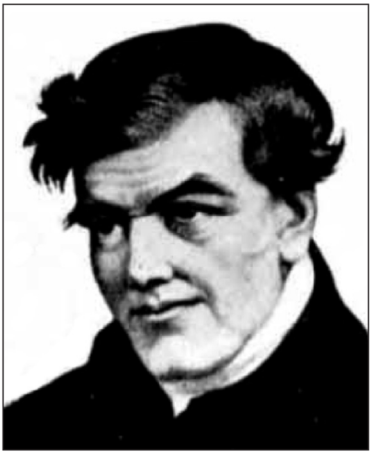
$$x + (y - z) = (x + y) - z$$

Esto no siempre tiene sentido para los números naturales; por ejemplo 1+(1+4) no es un número natural. Pero siempre que ambos lados tienen sentido, la ley se cumple, así es que la podemos considerar una ley de los números naturales. Éste es un caso de «de antemano», ya que los números naturales venían antes que las leyes; descubrimos las leyes al estudiar los números naturales.

Por otra parte, tomemos las leyes de más arriba y olvidemos que vienen de los números naturales. En vez de ello, consideremos que se refieren a números complejos, y que las operaciones +, – etc. son sobre números complejos. Entonces de nuevo resultan ser verdaderas. Esta vez hemos «interpretado» los símbolos y las leyes que les acompañan. Primero vienen las leyes (el «previamente» de Peacock), después la interpretación. Por supuesto que, en rigor, podríamos haber elegido los números naturales de nuevo en lugar de los complejos, y así los naturales serían también una interpretación. Pero aquéllos gozan de una posición privilegiada en tanto significado original de los símbolos; en un lenguaje más actual, Peacock hubiera dicho que son la «interpretación pretendida» de los símbolos y leyes.

La ventaja de los números complejos sobre los naturales (decía Peacock) es que las operaciones encuentran allá su sentido de un modo más general. En los naturales podemos considerar $\sqrt{4}$ pero no $\sqrt{3}$. En los reales existe $\sqrt{3}$ pero no $\sqrt{-3}$. En los complejos sí existe $\sqrt{-3}$. Otro modo de verlo consiste en darse cuenta de que, según avanzamos de los naturales a los enteros, a los racionales, a los reales y a los complejos, más y más ecuaciones encuentran solución. Los números complejos son un lugar natural donde parar, pues en ellos toda ecuación algebraica con al menos una variable tiene solución, como probó Gauss en 1799. Mas ellos no son necesariamente el final de la serie, ya que:

> No hay ningún límite a la proliferación de tales signos ([10] p. 201).



George Peacock 1791-1858.

Por ejemplo podríamos añadir exponenciación, 2^x. ¿Hay ecuaciones con respecto a esta operación que no tengan solución en los números complejos pero podrían tenerla fuera de ellos?

Peacock observó asimismo que podemos emprender un tercer camino: olvidar los naturales, no procurar ninguna nueva interpretación, y simplemente calcular con los símbolos de acuerdo a las leyes. A esto lo llamó «álgebra simbólica», en oposición al «álgebra aritmética» que estudia los números naturales. Puso en relación el álgebra simbólica con las interpretaciones observando que, si probamos algo en el álgebra simbólica, lo que probamos debe ser cierto bajo cualquier interpretación de los símbolos y las leyes. Si nuestra interpretación hace a las leyes verdaderas, entonces también hace verdadera a cualquier cosa que se siga de ellas.

Peacock estaba más allá de su tiempo. Sus inmediatos sucesores desarrollaron aquel álgebra simbólica, pero pasaron por alto dos elementos de su idea general. Primeramente ignoraron las interpretaciones; si sabemos cómo calcular consecuencias de nuestras leyes mediante el álgebra simbólica, ¿qué se añade al decir que tales leyes pueden ser interpretadas? (George Boole en 1847 fue una honrosa excepción. Refinó las ideas de Peacock al introducir el concepto de «sistema de interpretación»; lo veremos más tarde.) En segundo lugar, argumentaron que hay sistemas interesantes de símbolos y leyes que no vienen de los números naturales; por ejemplo en 1844 William Hamilton inventó los cuaternios, en los cuales la ley $xy = yx$ es falsa. En realidad el propio Peacock se podría haber dado cuenta de que la ley $\sqrt{x^2}$ es verdadera para los números naturales (allá donde la interpretación tenga sentido) pero falsa para los reales; tómese $x = -1$.

* * *

La idea de interpretación de Peacock nunca murió del todo, sino que se mantuvo viva gracias a un tipo diferente de cuestión. En la primera mitad del siglo diecinueve las geometrías se estaban encontrando con su propia crisis de significados divergentes. La geometría había tratado hasta entonces de la línea, del plano y del espacio tridimensional. Ahora, gracias a Gauss y Riemann, uno tenía geometrías de la superficie de una esfera o de un cilindro, así como extraños espacios imaginarios de «curvatura negativa» y un gran número de otras posibilidades. Así es que era natural preguntarse qué sistemas de proposiciones geométricas implicaban qué otras proposiciones geométricas. La vieja cuestión de si el postulado de las paralelas de Euclides era derivable de sus otros postulados era precisamente un ejemplo de este tipo. Y se desarrolló un método para responder a tales cuestiones. Supongamos que se tiene un sistema T de proposiciones que valen para un cierto espacio, y queremos saber si estas proposiciones implican alguna otra proposición ϕ. Una manera de mostrar que no consiste en procurar una reinterpretación del sistema T al modo de Peacock, mostrando que bajo esta reinterpretación la proposición es falsa ϕ. Por la década de 1920 estas reinterpretaciones llegaron a ser conocidas como «pseudoespacios» o «pseudomodelos». Para cumplir su función ni siquiera tenían por qué ser espaciales; podían ser abstractos o numéricos.

Por aquellas fechas George Peacock había sido largamente olvidado. Nadie discutía sus ideas sobre la posición privilegiada de la aritmética, o su idea de ir añadiendo nuevos elementos a una estructura hasta que las ecuaciones encontrasen solución. El propio Peacock dejó su puesto en la Universidad de Cambridge para convertirse en decano de la Catedral de Ely en 1839 –parece que no había sido un profesor muy reconocido– y murió en 1858 sin dejar descendencia. Pero su distinción fundamental entre símbolos e interpretaciones adquirió cada vez más importancia. Una razón de ello es que los matemáticos habían empezado a considerar clases de «estructuras». Una estructura consiste en un conjunto de objetos y en ciertas operaciones y relaciones que se destacan sobre aquél; ejemplos típicos son los grupos y los cuerpos.

Una estructura es, en lo esencial, un sistema de interpretación en el sentido de Boole. El conjunto de objetos de la estructura suministra el rango de interpretaciones permitidas para las variables. Boole sugirió que podríamos llamar «universo» a este conjunto, tomando prestado un término de la lógica de su amigo Augustus De Morgan. Este nombre ha sobrevivido, bien que el universo de una estructura se conoce también hoy día como su «dominio». Hablamos de los elementos del universo como «elementos de la estructura», y la «cardinalidad» de la estructura es el número de elementos de su universo. Las operaciones de la estructura son interpretaciones (en el sentido de Peacock) de sus marcas gráficas. Un «isomorfismo» de una estructura A a una estructura B es una función biyectiva f que va del universo de A al universo de B, y tal que si una relación de A se predica de elementos $a_1, \ldots, a_n$ de A, entonces la relación con el mismo nombre en B se predica de los elementos correspondientes $f(a_1), \ldots, f(a_n)$, y viceversa de B hacia A. (En esta definición las relaciones incluyen ecuaciones.)

Aunque el concepto en sí es más antiguo, el nombre «estructura» es en rigor del siglo veinte. Las estructuras eran conocidas a finales del siglo diecinueve como «sistemas», o de manera más pedante «sistemas de objetos» (del alemán *Systeme von Dingen*), para distinguirlas de los «sistemas de axiomas», que son los descendientes de las «condiciones» de Peacock.

Peacock no había pensado en términos de sistemas/estructuras. Para él el mundo de las matemáticas consistía en números, y los procesos que describió versaban sobre cómo añadir nuevos tipos de números. Pero en el nuevo esquema los números naturales eran una estructura, los enteros otra, los racionales otra, los reales otra y los complejos de nuevo otra. Me referiré a esta secuencia como la «jerarquía de Peacock». Ciertamente, para hacer de los números reales una estructura hemos de decidir qué operaciones incluimos; entonces el conjunto de símbolos para estas operaciones es llamado (en terminología moderna) la «signatura» de la estructura. Por ejemplo, los números naturales pueden tener una signatura consistente en los símbolos $+$, $\times$, 0 y 1; al pasar a los enteros podemos añadir – a la signatura, y así sucesivamente.

En términos de estructuras uno podría además separar dos partes en la concepción de Peacock. «Expandimos» una estructura cuando mantenemos sus elementos pero añadimos nuevas operaciones o relaciones. «Extendemos» una estructura cuando conservamos la signatura pero añadimos nuevos elementos. La nueva estructura resultante se llama «extensión» de la anterior, que a su vez es llamada «subestructura» de la nueva. Escribimos $A \subseteq B$ para expresar que la estructura B es una extensión de A. Pasar de los números naturales a los complejos implicaba tanto expansiones como extensiones.

La distinción fundamental de Peacock entre los símbolos y sus interpretaciones se consolidó aún más desde que a finales del siglo diecinueve se cayó en la cuenta de que las «condiciones» (o proposiciones o axiomas) no tienen por qué ser ecuaciones. Toda sentencia bien construida acerca de los números naturales, incluso el último teorema de Fermat, puede ser considerada un axioma con tal de que podamos escribirla con exactitud usando solamente los símbolos formales que se permitan. A finales de la década de 1910, las lecciones de David Hilbert en Gotinga popularizaron la idea de que cualquier sentencia de lógica de primer orden podría tomarse como axioma, al menos si era consistente. Además de la igualdad, variables y símbolos de funciones y de constantes permitidas por Peacock, los lenguajes de primer orden suministran símbolos de relación, así como:

$\neg$ 'no', $\wedge$ 'y', $\rightarrow$ 'si… entonces', $\forall$ 'para todo', $\exists$ 'existe'

Viejos gruñones como Gottlob Frege hicieron observaciones irritantes acerca de las vanas generalizaciones y los malos usos del término «axioma», fingiendo no darse cuenta de que esa mayor libertad podía estimular precisamente nuevos métodos con que tratarlas.

* * *

Si permitimos que nuestros axiomas sean sentencias de primer orden cualesquiera, una de las tesis de Peacock de sale del cuadro. No es cierto de ningún modo que todos los axiomas válidos para los números naturales sean válidos para sistemas numéricos más grandes, ni siquiera restringiéndonos a la suma y el producto. Así, la sentencia de primer orden:

$\forall x\,(x^2 \neq 2)$ («Para todo x, x^2 es distinto de 2»)

dice que, para cualquier número que tomemos, su raíz no es 2. Esto es cierto en los números naturales; asimismo es cierto en los enteros y en los racionales. Pero es falso respecto de los reales y de los complejos. De igual modo la sentencia:

$$\forall x\,(x^2+1 \neq 0)$$

expresa que –1 no tiene raíz cuadrada; esto es falso para todos los sistemas numéricos de Peacock excepto el más grande, el de los complejos.

Hay un patrón subyacente. Las dos sentencias de más arriba tienen ambas la forma:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \phi\,(x_1, \ldots, x_n)$$

donde la fórmula $\phi\,(x_1, \ldots, x_n)$ está «libre de cuantificación», es decir, no contiene $\forall$ ni $\exists$ (y por supuesto en los dos ejemplos anteriores $n = 1$). Se dice que una sentencia con esta forma es «universal». Si se tienen tres estructuras $A \subseteq B \subseteq C$, y una sentencia universal es verdadera en B, entonces también será verdadera en A, pero no necesariamente en C. A la inversa, una sentencia «existencial» es aquélla con la misma forma de más arriba pero con $\exists$ en lugar de $\forall$. Un ejemplo es:

$$\exists x\,(2 \neq 0 \rightarrow 2x = 1)$$

que dice que hay un elemento x tal que si 2 no es cero entonces 2 por x es 1. (Lo hemos dicho de este modo para poder poner el «existe» en el comienzo.) La sentencia es falsa tanto en los números naturales como en los enteros, pero verdadera de los racionales para arriba. En realidad, si $A \subseteq B \subseteq C$ son estructuras y una sentencia existencial es verdadera en *B*, entonces también es verdadera en *C* pero no necesariamente en *A*.

El proceso descrito por Peacock, añadiendo nuevos elementos de tal modo que las operaciones tengan sentido en más lugares, incrementa el número de sentencias existenciales verdaderas y no elimina ninguna. (Esto es cierto para extensiones por la razón dada en el párrafo anterior. También es cierto para expansiones, dado que pasar a una expansión nunca hace falsa una sentencia verdadera, aunque da significado a más sentencias y así puede generar nuevas sentencias verdaderas.) Así que podemos, razonablemente, preguntar: ¿Es esto un procedimiento general? ¿Podemos empezar por cualquier clase de estructura y añadir nuevos elementos hasta maximizar el número de sentencias existenciales verdaderas? Algunas personas (incluyendo Henri Poincaré) especularon sobre esta cuestión en términos generales. El teórico de grupos W. R. Scott mostró en 1951 que si empezamos desde un grupo arbitrario en lugar de hacerlo desde los naturales, y formamos extensiones a fin de aumentar el número de sentencias existenciales verdaderas sin usar $\neg$ ó $\rightarrow$, alcanzamos con naturalidad un punto final llamado «grupo algebraicamente cerrado», que mantiene con el grupo original a grandes rasgos la misma relación que los números complejos mantienen con los naturales.

Entonces, en 1962, Michael Rabin mostró como ejecutar la misma idea comenzando desde una estructura *A* cualquiera. Se toma un conjunto *T* de sentencias universales verdaderas en *A*. La construcción lleva a cabo extensiones repetidamente hasta alcanzar una estructura *B* en la cual las sentencias de *T* son todavía ciertas, pero tal que si *C* es cualquier extensión de *B* donde las sentencias de *T* son ciertas, entonces las sentencias existenciales verdaderas en *C* son justamente las mismas que en *B*. Las estructuras con esta propiedad de *B*, dado un conjunto particular *T* de sentencias universales, son llamadas «existencialmente cerradas» para *T*. Un resultado importante demostrado por Rabin fue que cualquier cosa que podamos decir acerca de elementos de *B* con una fórmula existencial (que es lo mismo que una sentencia existencial pero permitiendo variables libres) puede ser dicho también con un conjunto de fórmulas universales. Más precisamente, uno puede probar desde *T* la equivalencia de la fórmula existencial y la conjunción de un conjunto de sentencias universales. En general este conjunto puede ser infinito.

Ahora bien, en 1931 Gödel demostró un famoso teorema sobre CFA, el conjunto de sentencias de primer orden verdaderas respecto de los naturales usando solamente adición y producto como operaciones. (CFA abrevia «complete first-order arithmetic».) En términos modernos, mostró que ninguna computadora podría nunca ser programada para generar todas las sentencias de CFA y sólo ellas. Así es que CFA es enormemente complicado. Por contra, Alfred Tarski mostró en 1949 que el conjunto correspondiente para los números complejos es muy simple;

describió un conjunto simple de sentencias cuyas consecuencias en primer orden son exactamente las sentencias de primer orden verdaderas en el cuerpo de los números complejos. Tarski y sus estudiantes se interesaron por las otras estructuras de la jerarquía de Peacock. Tarski mostró que los números reales, al igual que los complejos, tienen un conjunto manejable de sentencias verdaderas. Su estudiante Julia Robinson mostró que los números naturales pueden ser definidos dentro de los racionales mediante fórmulas de primer orden, de donde se sigue que el conjunto de sentencias verdaderas para los racionales es tan poco manejable como lo era CFA para los naturales.

El resultado de Rabin mostró por qué los números complejos son, en este sentido, manejables. En ellos podemos decir con una sentencia existencial que un cierto conjunto de ecuaciones e inecuaciones (enunciados que afirman la no igualdad de ciertos números) tiene solución; éste es un enunciado sobre los coeficientes de las ecuaciones. Por el resultado de Rabin, este enunciado sobre los coeficientes puede reescribirse con fórmulas universales. En realidad, debido a ciertas propiedades ventajosas de los cuerpos, puede reescribirse como una fórmula sin cuantificadores $\forall$ ó $\exists$ en absoluto. Esto nos permite «eliminar cuantificadores» de cualquier fórmula de primer orden sobre los números complejos. Un análisis más certero enseña que a través de esta reducción podemos deducir todas las sentencias de primer orden verdaderas acerca de los números complejos a partir de un conjunto de sentencias con la forma:

$$\forall x \forall y \forall z \ldots \exists u \exists v \exists w \ldots \phi(x,y,z,\ldots,u,v,w,\ldots)$$

donde de nuevo $\phi(x,y,z,\ldots,u,v,w,\ldots)$ está libre de cuantificadores, y todos los $\forall$ están a la izquierda de los $\exists$. Sentencias de esta forma son llamadas «universal-existenciales». Un ejemplo es la sentencia:

$$\forall x \forall y \exists u (u^2+x \cdot u+y = 0)$$

Esta sentencia dice que toda ecuación cuadrática no trivial tiene solución; es verdadera para los números complejos por el teorema de Gauss antes mencionado.

Hay una eliminación de cuantificadores similar para los números reales; de hecho Tarski la descubrió antes que para el caso notoriamente más fácil de los números complejos. ¿Cómo podemos encontrar una fórmula libre de cuantificadores $\phi(x)$ que exprese lo mismo que $\exists y(y^2 = x)$ en el cuerpo de los números reales? La solución de Tarski fue (esencialmente) pasar a una expansión que contiene el símbolo $\leq$ para la relación de orden usual sobre los reales. Entonces la fórmula requerida es $0 \leq x$.

El enfoque de Tarski no tenía nada que ver con el cierre existencial. Pero fue retomado por Abraham Robinson, quien mostró que el cuerpo de los números reales está existencialmente cerrado para T, donde T es un conjunto de sentencias expresando que la estructura es un cuerpo donde -1 no es una suma de cuadrados. (Los axiomas para los cuerpos son universal-existenciales por causa del axioma que dice «cada elemento distinto de cero tiene un inverso multiplicativo». Es más, la noción de una estructura cerrada existencialmente puede generalizarse desde las sentencias universales a las universal-existenciales, y el resultado de Rabin todavía es válido en este último caso).

¿Qué es lo que pasa si seguimos avanzando en la jerarquía de Peacock, por ejemplo añadiendo exponenciación? Recientemente se ha trabajado mucho en ello. El panorama parece ser que los números complejos constituyen el nivel con un mejor comportamiento. Existen teoremas de eliminación de cuantificadores si subimos de nivel, pero se vuelven muy complicados. El propio Tarski se preguntó en torno a 1950 si hay un teorema de eliminación de cuantificadores para el cuerpo de los números reales con exponenciación. Esto fue cuarenta años antes de que Alex Wilkie diera una respuesta positiva.

Mencionamos antes algunas «propiedades ventajosas» de los cuerpos. Merece la pena explicar en detalle una de ellas. Supongamos que **K** es una clase de estructuras. Decimos que **K** tiene la «propiedad de amalgamación» si siempre que A, B y C sean estructuras en **K** con $A\subseteq B$ y, hay estructuras C' y D en **K** tal que $A\subseteq B\subseteq \mathrm{D}$, y $A\subseteq C'\subseteq \mathrm{D}$ existe un isomorfismo de C hacia C' que es la identidad sobre A. Esto es cierto para los cuerpos: si A es un subcuerpo de B y C, entonces hay una extensión D con una inmersión $f{:}C\to D$ entre cuerpos que es la identidad sobre A. (Luego C es la imagen de f en D).

* * *

Pero hemos avanzado más allá de nuestra historia. En el momento de escribir, los comentarios Peacock eran parte de un informe sobre «ciertas ramas del análisis». Lo que dijo concernía a la organización entera de las matemáticas, pero no existía ningún campo matemático llamado Organización de las Matemáticas. En los tiempos en que Rabin comenzaba a trabajar había una rama de las matemáticas llamada Teoría de Modelos, y Rabin se movía dentro de esta teoría. Es cierto que la teoría de modelos había sido inventada como una suerte de recipiente para resultados concernientes a interpretaciones de fórmulas, y que nunca habría sido inventada si los resultados no hubieran estado ya allí para ser recogidos. Mas la invención de una nueva disciplina es ya una historia en sí misma y deberíamos contarla solamente por encima.

Recordemos que, de acuerdo a Peacock, hay dos líneas de pensamiento relativas a las interpretaciones. En la primera dirección partimos de una estructura particular A, suministramos símbolos para hablar acerca de A, y armamos los hechos acerca de A que pueden ser expresados con estos símbolos. En la segunda dirección partimos de un conjunto T de sentencias simbólicas y tomamos en cuenta qué interpretaciones de los símbolos harán verdaderas a todas las sentencias de T. Nótese que hay aquí cierta asimetría: en la primera dirección tenemos una estructura particular y nos dirigimos hacia muchas sentencias formales, mientras que en la segunda dirección empezamos con muchas sentencias formales y acabamos con muchas estructuras.

Tuvieron que pasar más de cien años antes de que alguien desafiara seriamente a esta asimetría. La podemos encontrar incorporada en el tratamiento de Tarski en su libro de texto [13] de 1936, bien que con una muy breve apología (entre las páginas 119 y 120 de la edición de 1994). Históricamente esto es extraño, pues tres décadas antes un grupo de matemáticos americanos había establecido cómo trabajar correctamente en la primera dirección. A saber, empezaban con una clase **K** de estructuras relacionadas entre sí, por ejemplo las álgebras de Boole, y entonces escribían todos los axiomas que son verdaderos en cada estructura de **K** y que además definen **K** en el sentido de que cualquier estructura para la cual todos los axiomas son verdaderos está de hecho en **K**. Los más conocidos de aquellos americanos eran Edward Huntington (quien trató con las álgebras booleanas en 1904), Oswald Veblen y Charles Langford.

El libro de Tarski fue una de las últimas publicaciones escritas en el viejo estilo. En la década de 1940 Anatoliĭ Mal'tsev en Rusia, Tarski en América y Abraham Robinson en Gran Bretaña se pasaron todos ellos a un nuevo modo de hacer. Por un lado tenemos clases **K** de estructuras, por otro lado tenemos conjuntos T de sentencias formales. Uno puede estudiar la relación «Cada sentencia en T es verdadera en cada estructura en **K**». Por medio de esta relación, hechos relativos a sentencias de primer orden pueden ser traducidos a hechos acerca de estructuras. Por ejemplo, un resultado temprano de Mal'tsev en esta línea concernía a grupos que tienen representaciones matriciales n-dimensionales, donde n es un entero positivo. Mal'tsev demostró en 1940 que si cada subgrupo generado finitamente a partir de un grupo G tiene esa propiedad, entonces G la tiene. Su prueba mostraba cómo deducir esto desde un resultado más general llamado Teorema de Compacidad, al cual volveremos. Otro resultado temprano en este campo, también derivado del Teorema de Compacidad pero más cercano a los intereses de Peacock, fue probado independientemente por Tarski y Jerzy Łoś: supongamos que es una sentencia de primer orden, y que para todo par de estructuras $A \subseteq B$, si ϕ es verdadera en B, lo es también en A. Entonces ϕ es lógicamente equivalente a una sentencia universal. Esta es una conversa parcial de una propiedad de sentencias universales que mencionamos anteriormente.

* * *

Con motivo del nuevo área de estudio se fijó algo de terminología en los cincuenta. Un sistema (de cosas) resultó ser una «estructura», y un conjunto de sentencias formales una «teoría». Cuando una sentencia formal ϕ es verdadera en una estructura A, uno expresa esto diciendo que A es un «modelo» de ϕ, no una «interpretación» de ϕ como hubiera dicho Peacock. Se dice que una estructura A es «modelo» de una teoría T si es modelo de cada sentencia de T. El área fue llamada «teoría de modelos». (Rudolf Carnap había sugerido anteriormente el nombre «teoría de sistemas», pero esta sugerencia se quedó en el camino).

La palabra «interpretación» del propio Peacock adquirió un nuevo significado. En la primera mitad del siglo veinte se volvió habitual pensar que las matemáticas acaecían dentro de la teoría de conjuntos. Así es que una estructura A es un objeto conjuntista, y cuando usamos A para dar significado a los símbolos de un lenguaje formal L, lo que realmente estamos haciendo es traducir desde el lenguaje L hasta el lenguaje de la teoría de conjuntos. Así traducciones entre lenguajes formales se pasaron a conocer como «interpretaciones». Pero ahora supongamos que tenemos una traducción de un lenguaje L a otro L', y tenemos una estructura A cuyo lenguaje es L'. Entonces podemos usar la traducción para definir una estructura A' cuyo lenguaje es L. Se haría así: los elementos de A' son los mismos que aquellos de A, y se define una relación que valga en A' si su traducción vale en A (y lo mismo con operaciones). En este caso decimos que A' es «interpretada» en A. Una mínima generalización nos permite considerar los elementos de A' como clases de equivalencia de n-tuplas de elementos de A. Por ejemplo, dados los números naturales $\mathbf{N}$ podemos definir los enteros $\mathbf{Z}$ mediante una interpretación: los elementos de $\mathbf{Z}$ son clases de equivalencia de pares ordenados (m, n) de naturales, donde (m, n) es equivalente a (p, q) si y sólo si $m + q = n + p$, y las operaciones aritméticas sobre $\mathbf{Z}$ están definidas en términos de las de $\mathbf{N}$ y tal que la clase de equivalencia (m, n) se comporta como esperamos que el entero $m - n$ lo haga. La definición de Julia Robinson de los naturales dentro del cuerpo de los racionales era un ejemplo más complicado de interpretación en el nuevo sentido.

El nombre «teoría de modelos» hizo fortuna y la materia se desarrolló rápidamente. De hecho se desarrolló tan rápido que mucha gente declaraba en mitad de los sesenta que ya se había agotado. Recuerdo que, siendo un estudiante de doctorado en 1966, se me aconsejó que eligiera otro campo porque la teoría de modelos estaba muerta. Irónicamente 1965 supuso uno de los momentos decisivos en la historia de esta ciencia, debido a la invención de la teoría de la estabilidad de Michael Morley. Pero de nuevo me adelanto a mí mismo…

Con la nueva terminología a mano podemos formular el Teorema de Compacidad. Dice que si T es un conjunto de sentencias de primer orden, y cualquier subconjunto finito de T tiene un modelo, entonces T tiene un modelo. Gödel demostró esto en su tesis doctoral de 1930, aunque sólo para conjuntos numerables de sentencias; de forma independiente Mal'tsev lo demostró en 1936 para lenguajes arbitrarios de primer orden. (Esta independencia no es todavía del dominio público; yo aprendí recientemente de Lev Beklemishev que los archivos de Mal'tsev dejan esto claro. Algunos años después, Abraham Robinson y Leon Henkin alcanzaron, cada uno por su lado, el resultado de Mal'tsev generalizando el de Gödel.)

Por los años cincuenta se puso de moda en matemáticas, siempre que se introducía un nuevo tipo de estructura, definir una clase de aplicaciones entre estructuras. Dichas aplicaciones debían ser aquéllas que preservaban características importantes en el estudio de tales estructuras. Quienes hacían teoría de modelos eligieron una clase de aplicaciones a las que llamaban «inmersiones elementales». Por simplicidad definiré solamente un caso particular. Sean *A* y *B* estructuras con $A \subseteq B$. Decimos que *B* es una «extensión elemental» de *A*, y que *A* es una «subestructura elemental» de *B*, si después de añadir símbolos para nombrar todos los elementos de *A*, cada sentencia de primer orden verdadera en *A* también es verdadera en *B*. Por ejemplo si *A* y *B* son cuerpos y *B* es una extensión elemental de *A*, y cierto elemento *a* de *A* no tiene raíz cuadrada en *A*, tampoco la tiene en *B*. Así es que un hecho importante de la jerarquía de Peacock era que las extensiones involucradas *no* eran elementales.

Se han probado algunos teoremas importantes y generales sobre inmersiones elementales. Uno de ellos reza así. Sea *A* una estructura infinita (recuerda que esto significa que el universo de *A* es un conjunto infinito), y supongamos que el lenguaje de primer orden para la signatura de *A* tiene λ sentencias. Entonces para toda cardinalidad κ que sea como mínimo cardinalidad de *A* y como mínimo λ, *A* tiene una extensión elemental de cardinalidad κ; y para toda cardinalidad κ que sea como máximo la cardinalidad de *A* y como mínimo λ, *A* tiene una subestructura elemental de cardinalidad κ. Esta es una parte del gran teorema conocido por el gran nombre de «teorema ascendente y descendente de Löwenheim-Skolem-Tarski».

La noción de inmersión elemental fue importante para Abraham Robinson. Él decía que una teoría *T* es «modelo-completa» si cada vez que *A* y *B* son modelos de *T* con $A \subseteq B$, *B* es una extensión elemental de *A*. Las teorías modelo-completas siempre tienen cierto tipo de eliminación de cuantificadores: cada fórmula es equivalente a una fórmula existencial. Así que podemos eliminar el cuantificador $\forall$; asimismo podemos eliminar $\exists$, pero no ambos a la vez.

* * *

En torno a 1970 se hizo popular, entre los científicos de la cognición, determinada descripción de soluciones de problemas. No se trata de teoría de modelos, pero frecuentemente ocurre que las mismas ideas abstractas aparecen más o menos a la vez en diferentes disciplinas; quizás existe alguna fertilización mutua e intangible. La situación era como sigue. Tenemos una colección *S* de «estados», a la que llamamos «espacio del problema». Algunos de tales estados son seleccionados como «metas»; si estamos en uno de ellos entonces hemos solucionado el problema. Se nos dan formas de pasar de un estado a otro, y un estado es tomado como estado de partida. Solucionamos el problema cuando partimos del estado de partida y alcanzamos una meta a través de las rutas permitidas.

Para quien hace teoría de modelos un problema central es construir un modelo para una determinada teoría *T*. Una manera de hacer esto (recordemos a Peacock) consiste en partir de una estructura pequeña y formar extensiones hasta que alcancemos todos los elementos que se necesitan. Interpretamos así las «metas» como modelos de *T*, y los «estados» como subestructuras de modelos de *T*. Existe un dispositivo técnico que nos permite expandir el lenguaje de cualquier teoría de primer orden T de tal modo que hace T modelo-completa; resulta conveniente hacer esto aquí, de suerte que siempre que A y B sean «metas» con, B sea una extensión elemental de A. Debido a cierta propiedad de amalgamación de inmersiones elementales, podemos simplificar la escena sin perder ninguna información esencial, imaginando que todas las «metas» son subestructuras de un solo y enorme modelo de T conocido como el «gran modelo» o el «modelo monstruo». Este planteamiento llegó a la teoría de modelos en los setenta, aunque era una consecuencia natural del artículo de Morley de 1965.

Hay varias preguntas naturales que podemos formular dentro de este escenario. Por ejemplo, supongamos que nos movemos por el espacio de un problema añadiendo un elemento en cada movimiento (y entonces cerramos las funciones del nuevo modelo de modo que obtenemos una nueva estructura). Cuando A es un «estado» (una subestructura del gran modelo), se dice que dos elementos b y c del gran modelo tienen «el mismo tipo sobre A» si el resultado $A(b)$ de añadir b a A es indistinguible del resultado $A(c)$ al añadir c. Se puede precisar todo esto diciendo que hay un isomorfismo desde $A(b)$ hasta $A(c)$ que es la identidad sobre A y lleva de b a c. Una clase de equivalencia de elementos bajo esta relación es llamada «tipo sobre A». Escribimos $S_1(A)$ para el conjunto de tipos sobre A. Ahora podemos preguntar: ¿hay algún límite para el número de elementos en $S_1(A)$? Por ejemplo, ¿debe tener el mismo tamaño que la propia A? Debe tener al menos el mismo tamaño que A, ya que podemos formar una extensión $A(a)$ con cada elemento a de A.

También podemos preguntar cómo es de grande la clase de todas las metas. En los ejemplos que estudiamos en primer lugar, las metas eran las subestructuras elementales del gran modelo, y por el teorema de Löwenheim-Skolem hay al menos una de ellas en cada cardinalidad situada entre la cardinalidad del gran modelo y la del lenguaje, incluyendo ambos extremos. Bajo estos presupuestos habrá infinidad de metas. La restricción más fuerte que cabe esperar consiste en que, para cada cardinalidad, todas las metas con dicha cardinalidad sean isomorfas unas a otras. En este caso decimos que la teoría es «categórica en potencia». Decimos que la teoría es «categórica en la cardinalidad» κ si todas la metas con cardinalidad κ son isomorfas entre ellas.

Por ejemplo, si el gran modelo es un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces sus subestructuras elementales son sus subcuerpos algebraicamente cerrados. Un viejo teorema de Steinitz dice que dos cuerpos algebraicamente cerrados y de la misma característica son isomorfos si y sólo si tienen el mismo grado de trascendencia. Se sigue que la teoría es categórica en cada cardinalidad no enumerable pero no es categórica en la cardinalidad ω de los números naturales. Se dice que una teoría de este tipo es «categóricamente no enumerable», y sus modelos son también llamados «categóricamente no enumerables».

Ahora, gracias en buena medida al trabajo de Morley y de quienes lo han continuado (especialmente Bill Marsh, Alistair Lachlan, John Baldwin, Saharon Shelah, Daniel Lascar y Bruno Poizat), una verdadera cadena de conexiones inesperadas entre todas aquellas cuestiones vino a la luz. Si una teoría de primer orden es categóricamente no enumerable, entonces para toda subestructura infinita A del gran modelo, $S_1(A)$ siempre tendrá la misma cardinalidad que A. Si para cada subestructura infinita A del gran modelo, $S_1(A)$ tiene la misma cardinalidad que A, entonces varias propiedades fuertes de amalgamación son aplicables, y ciertos rasgos de los modelos deben ser definibles mediante fórmulas de primer orden. Los detalles son complicados y frecuentemente suponen fuertes dosis de combinatoria, pero las interrelaciones descubiertas eran comparables a los jardines colgantes de Babilonia. Este estudio se vino a conocer como «teoría de la estabilidad», por la razón –no muy convincente– de que, en algunos casos felices, las cardinalidades permanecen estables mientras se pasa desde A hasta $S_1(A)$.

Los primeros casos que fueron estudiados, por ejemplo el de los cuerpos algebraicamente cerrados y con una característica fija, estaban en un lenguaje de primer orden con un conjunto numerable de símbolos. El teorema de Morley en su artículo de 1965 decía que si una teoría de primer orden en un lenguaje numerable es categórica en alguna cardinalidad no enumerable, entonces es categóricamente no enumerable. Se necesitaban técnicas especiales para extender la teoría de estructuras categoriales no enumerables a lenguajes no enumerables de primer orden, mas ello fue logrado por Steve Buechler, Ehud Hrushovski y Chris Laskowski. Shelah estudió generalizaciones más amplias, algunas de ellas muy alejadas de los lenguajes de primer orden. En una de sus generalizaciones la clase de estructuras es «excelente»; ésta es una condición técnica vinculada con las propiedades de amalgamación en varias dimensiones. Mostró que una clase excelente satisface el teorema de Morley. «Clases abstractas elementales» son otra de las generalizaciones de Shelah; en ellas se pierde incluso la noción de lenguaje. Sólo los montañeros de la matemática sobreviven en semejantes alturas.

* * *

Empezamos con números naturales, y fuimos generalizando hasta los enteros, los racionales, los reales, los complejos. Para Peacock los números naturales son el corazón de las matemáticas, y las demás generalizaciones están justificadas en la medida en que se relacionan con los números naturales.

Pero entonces nosotros generalizamos todavía más, estudiando modelos de teorías de primer orden cualesquiera. Shelah fue de nuevo más allá, hasta las clases de clases de teorías de primer orden –una materia que él razonablemente llamó «teoría de la clasificación», bien que sus métodos coincidían con los de la teoría de la estabilidad. En sus generalizaciones más amplias, desaparece incluso la restricción a teorías de primer orden. Parecemos estar a años luz del mundo decimonónico de Peacock, donde todo se organizaba en torno a los números naturales.

Pero no es así, dijo Boris Zilber. Si preguntamos por las cuestiones correctas de teoría de modelos, entonces nos volvemos directamente atrás –no hacia los números naturales, aunque sí al menos hacia los cuerpos algebraicamente cerrados; los números complejos son un cuerpo algebraicamente cerrado. La afirmación de Zilber es paradójica. Un cuerpo es una noción algebraica bastante específica, y no parece haber razón por la cual dicha noción debiera emerger desde consideraciones modelo-teóricas generales.

La propuesta de Zilber fue examinar teorías de primer orden categóricamente no enumerables. En los ochenta conjeturó que toda estructura categórica no enumerable es equivalente bajo cierta interpretación a una de las siguientes estructuras, todas ellas importantes en la matemática clásica: un conjunto infinito, un espacio infinito proyectivo o afín sobre un cuerpo finito (se trata de parientes cercanos a los espacios vectoriales sobre cuerpos finitos), o un cuerpo algebraicamente cerrado. También sugirió, y en algún caso llegó a probar, cómo podemos decir que una de aquellas posibilidades es la correcta. La conjetura resultó ser falsa, como demostró Ehud Hrushovski. Pero se podía identificar el motivo del fracaso: hay una topología definida algebraicamente y llamada topología de Zariski que es definible sobre cuerpos algebraicos pero no puede ser reconstruida desde la mera teoría de modelos. Hrushovski y Zilber, los dos juntos, axiomatizaron las topologías de Zariski y mostraron que la conjetura de Zilber se cumple para las «geometrías de Zariski» (estructuras que obedecen aquellos axiomas).

Esto no llegaba a ser una derivación de la noción de cuerpo algebraicamente cerrado a partir de nociones puramente modelo-teoréticas, pero era mucho más de lo que cualquiera hubiera esperado antes de la conjetura de Zilber. Eran además buenas matemáticas; Hrushovski aplicó este resultado para encontrar una solución completa y uniforme a la conjetura de Mordell-Lang sobre cuerpos de funciones, un problema clásico de la geometría diofántica que anteriormente había sido resuelto sólo en algunos casos. Más recientemente Anand Pillay y Martin Ziegler encontraron un modo de eliminar las geometrías de Zariski en el argumento de Hrushovski usando otras ideas de la matemática clásica; pero fueron tales geometrías la clave en la solución original al problema.

Peacock había observado que podemos movernos hacia sucesivas extensiones de los naturales si consideramos más y más operaciones. ¿Qué ocurre si consideramos la exponenciación? Hay bastantes problemas clásicos sobre la función exponencial en los números complejos, algunos de ellos considerados muy difíciles. Uno de ellos es la conjetura de Schanuel, que dice que si los números complejos $a_1,\dots,a_n$ son linearmente independientes sobre el cuerpo $\mathbf{Q}$ de los racionales, entonces el cuerpo $\mathbf{Q}\,(a_1,\dots,a_n,e^{a1},\dots,e^{an})$ tiene un grado trascendente de al menos n sobre $\mathbf{Q}$. En los últimos años Zilber hizo un avance importante y de un carácter casi gnómico. Escribió un conjunto de axiomas para las funciones exponenciales sobre cuerpos algebraicamente cerrados, incluyendo la conjetura de Schanuel como conjunto de axiomas. Mostró que la clase resultante de cuerpos con funciones exponenciales es una clase excelente en el sentido de Shelah, y es categórica en el primer cardinal no enumerable ω_1. Así pues, por el resultado de Shelah citado anteriormente, esta clase es categórica en la cardinalidad del cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos; así es que hay hasta isomorfismo, justamente un modo de añadir una función exponencial e^x a **C** de suerte que resulte una estructura dentro de esa clase. Los presentimientos de la gente difieren, pero parece una conjetura muy razonable que la función exponencial usual de e^x sobre **C** (tomada por generalización de la exponencial n^x sobre los naturales) es una de esas funciones. Esta conjetura implica la de Schanuel.

Dentro de unos cien años quizá sepamos si esta conjetura de Zilber nos recompensa con una prueba de la conjetura de Schanuel. Esto afianzaría ciertamente la descripción de Peacock de la aritmética como «ciencia de la sugestión» ([10], p. 199).

* * *

George Peacock plantó una semilla, y hoy el árbol ha crecido y se ha convertido en una rama floreciente de las matemáticas. Yo la he distorsionado un poco por concentrarme en el tema de Peacock y sus transformaciones. La teoría de modelos es mucho más amplia que todo eso; como el propio Walt Whitman es inmensa y contiene multitudes. Pero sé que no soy el único en presentir que esas interacciones íntimas con las estructuras de la matemática clásica son como la columna vertebral de este área.

De hecho hay otras conexiones entre la teoría de modelos y el cuerpo de los números reales. Una es el análisis no estándar de Abraham Robinson, que construye infinitesimales pasando a una enorme extensión elemental del cuerpo de los números reales, de tal modo que podemos calcular *dy/dx* tomando *dy* y *dx* como infinitesimales, al igual que hacía Leibniz (Bell[3]). Otra es la teoría de estructuras *o*-minimales, fundada por Anand Pillay y Charles Steinhorn tras las sugerencias de Lou van den Dries, quien generaliza la eliminación de cuantificadores de Tarski al cuerpo de los números reales, más o menos como la teoría de la estabilidad generaliza propiedades del cuerpo de los números complejos, y ha resultado ser útil en la resolución de problemas clásicos (Van den Dries [3]).

Hay disponibles varios libros de texto, por ejemplo Manzano [8], Hodges [5], Marker [9], Pillay [12] en orden progresivo desde un nivel elemental hasta un nivel de investigación. Los desarrollos más recientes son accesibles solamente en artículos científicos –por ejemplo, Zilber [15] para su trabajo sobre exponenciación en los complejos, Grossberg y Hart [4] para los rudimentos sobre clases excelentes, y Wilkie [14] para su trabajo sobre exponenciación en los reales. Hay técnicas de la teoría de modelos que se han vertido sobre muchas otras áreas, por ejemplo teoría de la complejidad (Immerman [7]), diseño de sistemas de software (Börger y Stärk [2]) y semántica de los lenguajes naturales (Peters y Westerståhl [11])–. La historia definitiva todavía debe escribirse, aunque hay ya algunas notas en mi página web [6].

Bibliografía

[1] Bell, J. L., *A Primer of Infinitesimal Analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 1998.

[2] Börger, E. y Stärk, R., *Abstract State Machines: A Method for High-Level System Design and Analysis*, Berlin, Springer-Verlag, 2003.

[3] van den Dries, L., *Tame Topology and O-Minimal Structures*, Cambridge, Cambridge University Press, 1998.

[4] Grossberg, R. y Hart, B., «The classification theory of excellent classes», *Journal of Symbolic Logic* 54, 1989, pp. 1359-1381.

[5] Hodges, W., *A Shorter Model Theory*, Cambridge, Cambridge University Press, 1997.

[6] Hodges, W., «Notes on the history of model theory» at www.maths.qmul.ac.uk/~wilfrid/history.pdf.

[7] Immerman, N., *Descriptive Complexity*, New York, Springer-Verlag, 1999.

[8] Manzano, M., *Model Theory*, Oxford, Oxford University Press, 1999.

[9] Marker, D., *Model Theory: An Introduction*, New York, Springer-Verlag, 2002.

[10] Peacock, G., «Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis», *Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, London, John Murray, 1834, pp. 185-352.

[11] Peters, S. y Westerståhl, D., *Quantifiers in Language and Logic*, Oxford, Clarendon Press, 2006.

[12] Pillay, A., *Geometric Stability Theory*, Oxford, Clarendon Press, 1996.

[13] Tarski, A., *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, Fourth Edition, Oxford, Oxford University Press, 1994.

[14] Wilkie, A., «Model completeness results for expansions of the real field by restricted Pfaffian functions and the exponential function», *Journal of the American Mathematical Society* 9 (1996) 1051-1094.

[15] Zilber, B., «Exponential sums equations and the Schnauel conjecture», *Journal of the London Mathematical Society* 65 (2002) 27-44.

