

Representaciones del espacio tiempo y no localidad¹

Representations of Space-Time and Nonlocality

Víctor RODRÍGUEZ

Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
gauchovrr@gmail.com

Recibido: 20/05/2018. Revisado: 30/05/2018. Aceptado: 30/05/2018

Resumen

Se presenta un breve panorama de las investigaciones contemporáneas sobre el concepto de espacio, espacio-tiempo y sus relaciones con la no localidad. Para ello se atienden aspectos de la historia del concepto de espacio-tiempo y de la teoría cuántica, así como varios intentos de fusión de estas dos grandes tradiciones conceptuales. Se sostiene que, aún cuando se acepta el importante protagonismo de cada una de ellas, existen numerosas lagunas dignas de exploración entre los abordajes provenientes de la matemática, la física y la filosofía sobre este viejo tema.

Palabras clave: espacio; espacio-tiempo; no-localidad; gravedad cuántica; matemáticas.

Abstract

A brief panorama of contemporary researches on the concepts of space, space-time and its relations to nonlocality is presented. In this regard, some historical aspects of the concept of space-time and quantum theory are considered under the perspective of possible connections between them. It is argued that, even though it is accepted the important role of each one for the topic, there are numerous gaps between mathematics, physics and philosophy that deserve further attention on this old theme.

Keywords: *space; space-time; non-locality; quantum gravity; mathematics.*

¹ Este artículo sigue en líneas generales la conferencia dada en el IV Congreso Iberoamericano de Filosofía de la Ciencia y de la Tecnología, Salamanca, España – 3 al 7 de julio de 2017.

1. Introducción

Se pretende dar aquí un breve panorama de las reflexiones actuales sobre la naturaleza del espacio, aunque el artículo girará en buena medida sobre el concepto de espacio tiempo. Se ha hecho una selección de tópicos vinculados con el escenario global, acorde con las dimensiones del trabajo y las limitaciones conceptuales del autor. Se intenta mostrar también cómo trabajan ciertas comunidades vinculadas con la filosofía del espacio tiempo. La exposición pretende lograr cierto equilibrio entre una versión considerablemente general y una que atiende a los lenguajes propios de las áreas involucradas. Con respecto a los abordajes clásicos sobre el tema, cabe recordar que hay una larga y valiosa historia: los enfoques provenientes de Leibniz y de Newton, la concepción relacional, las reflexiones sobre el espacio como continente de la materia y sus interacciones, etc. Aquí, el foco está puesto principalmente en algunas investigaciones recientes provenientes del campo científico.

Naturalmente, hay físicos, matemáticos y también filósofos involucrados. Una primera impresión que ofrece el acercamiento a estas comunidades es que hay muchos científicos, pero relativamente pocos filósofos; al menos, en lo referido a este tema. El paisaje global que se encuentra ofrece numerosas sub-disciplinas con una actividad robusta, sobre todo en ciencias. A esto se suma el hecho de que no todos los filósofos dan prioridad a una activa interacción con los científicos en este dominio. En cualquier caso, el campo de la filosofía del espacio tiempo presenta un perfil diseminado entre numerosas comunidades.

A los fines de esta presentación, se dividen las investigaciones en tres grandes grupos: actividad experimental, actividad teórica y actividad especulativa. Esta división no es precisa, ya que hay zonas de superposición y otras considerablemente vagas. La principal diferencia entre cuestiones teóricas y especulativas radica en que aún muchos físicos que son rotulados como teóricos, tienen trabajos pertenecientes al tercer ámbito; esto es, no siempre poseen una teoría madre que sirva de sustento para sus reflexiones. Como se intentará mostrar más adelante, esta actividad está vigente en las fronteras de la física teórica y es una potente herramienta generadora de heurísticas al servicio de la investigación. Por otra parte, se intenta insinuar también que tanto la física teórica, como la especulativa, están impregnadas de cuestiones interesantes para la filosofía de la ciencia. Lamentablemente, el excesivo nivel técnico de ciertos lenguajes científicos dificulta la comprensión de muchos conceptos; a esto se suma el hecho de que son pocos los científicos que participan en los departamentos y foros de filosofía de la ciencia. De modo similar, hay nociones acuñadas por filósofos que no siempre son conocidas, o comprendidas adecuadamente, por los científicos especializados. Quizás por todo ello, el paisaje que se rescata es que no se trata sólo de ‘las dos culturas’, sino de varias.

2. Ámbitos del espacio

Entrando en tema, al marco general lo da una pregunta aparentemente simple, pero profunda: ¿Qué es el espacio? Una carta de Gauss (1900, 201) sirve para ilustrar el punto de vista adoptado en este artículo:

En mi convicción interna, el estudio del espacio ocupa un lugar muy diferente en nuestro conocimiento a priori que el estudio de la cantidad... Debemos admitir humildemente que si el número es el producto puro de nuestra mente, el espacio tiene una realidad fuera de nuestras mentes y no podemos a priori prescribir sus leyes completamente.”
[Trad. del autor].

Gauss ha sido un profundo filósofo natural, además del célebre matemático que todos conocemos. Pero sin entrar en detalles históricos, se puede decir que la pregunta sigue vigente. El espacio continúa siendo un gran enigma.

Por un lado, tenemos el espacio físico, con diferentes grados de evidencia de acuerdo con el perfil cognoscitivo adoptado. La física sugiere algunos; la astronomía, otros; la cosmología, otros. Cuando se usan escalas de distancias en el cosmos, se apela a criterios para ensamblar pautas de medida. Estos criterios habilitan para decir qué significa conceptualizar a una galaxia como muy lejana. A partir de ellos, se empalman triangulaciones próximas al sistema solar con otros indicadores de distancia válidos para el cosmos en gran escala. Aquí hay no sólo riqueza metodológica, sino también epistemológica. Ciertos casos, como la radiación de fondo del cosmos, han sugerido modelos para articular la continuidad espacial con las estructuras materiales aparentemente discretas que pueblan el universo en gran escala. De todos modos, aquí es conveniente algo de modestia. Cuando salió el libro de S. Weinberg (2008) sobre cosmología, un *review* para una revista especializada elogiaba el nivel de actualización de este premio Nobel, dadas las dificultades que actualmente tiene aún un físico para lograr tal objetivo en este sector de investigación.

En la vida diaria, también usamos criterios para decir que un objeto se encuentra más lejos que, o que es más grande que otro. En alguna traducción de la novela checa de J. Hasek, “El buen soldado Svejk”, se cuenta la anécdota de alguien en un manicomio que intentaba convencer a otros que en el interior de la tierra hay un globo de diámetro mayor que ella misma. Esto suena cómico, pero no lo es tanto desde la perspectiva de la matemática, como lo mostró la paradoja de Banach-Tarski unos diez años después de la aparición de esa obra literaria. Los matemáticos pueden hacer construcciones que alteran el sentido común.

El concepto de espacio matemático es central en la caracterización general del espacio. Aquí hay una doble tradición importante: la geometría y la topología; en particular, el rico paisaje mostrado por los cruzamientos entre ambas en el último siglo. La geometría en el siglo pasado ya mostraba una trama muy difícil

de seguir, por sus bifurcaciones y extensiones. Peor aún es el caso de la topología. Si se toma algún punto de partida, como Poincaré a comienzos del siglo pasado y se trata de seguir su evolución, vale lo dicho arriba: muchos matemáticos, pocos filósofos. Pero el problema es válido también para los propios matemáticos. Una voluminosa historia de la topología editada por James (1999), consta de unas cuarenta entradas, cada una escrita por un autor diferente. La topología en general se está escapando de la comprensión de un matemático individual. Una ligera lectura sugiere que sobran las ideas originales allí, pero, por el lenguaje críptico en que aparecen, se hace difícil captarlas. Algunos de esos desarrollos aparecen luego en modelos. Por ejemplo, en la teoría física de cuerdas. El programa de los matemáticos Eugenio Calabi y Shing-Tung Yau —a través de la teoría matemática que lleva sus nombres— está siendo considerado en abundante detalle. La razón es que esta estructura matemática puede dar cuenta de un eventual enrollamiento de las dimensiones espaciales que sobran más allá de cuatro. Esto es debido a que en las cuerdas el lenguaje está escrito en diez u once dimensiones y como es sabido, las dimensiones a partir de cuatro no presentan un correlato directo con la naturaleza. En cualquier caso, se trata de una herramienta matemática —una variedad— puesta al servicio de una representación del espacio físico.

Lo que importa al científico es que si el espacio se expresa a través de pequeñas cuerdas en lugar de recurrir solamente a los puntos, puede suceder que las vibraciones de esas cuerdas bajo esa representación sirvan para avanzar en una futura teoría sobre fenómenos físicos no del todo comprendidos actualmente. Como comentario lateral, una obra de hace pocos años es un buen ejemplo de una función pedagógica importante. Yau (2010) escribió un libro que, aunque es en parte autobiográfico, allana el camino para entender algunas nociones claves de este *corpus* matemático. Este es un estilo de gran valor para difundir ideas en un ámbito más extendido de científicos y filósofos. Naturalmente, hay diferentes niveles de divulgación, pero algunos son excelentes y útiles para un abordaje epistemológico del tema. La conjetura de Calabi-Yau, propuesta por el primer matemático en la década de 1950 y demostrada por el segundo unos veinte años después, esconde una trama muy sutil de ideas, algunas de las cuales están asociadas con investigaciones de Riemann y de Einstein; en particular, con el tratamiento del campo vacío por parte del segundo. No es casual el retorno posterior como lenguaje para la física. Aquí pueden apreciarse rostros complementarios de matemática y física. Al respecto, un ejemplo de un científico contemporáneo es E. Witten. Sus artículos son a veces más apreciados por los matemáticos que por los físicos. El encuentro de la geometría y de la topología con la física no sólo tiene que ver con lo que uno podría llamar ‘modelos’ —por estar sugeridos por alguna suerte de actividad empírica potencial—, sino también con el desarrollo propio de la matemática, por su dinámica muy peculiar.

Los matemáticos se han permitido concebir, aún dentro de los espacios métricos, conceptos que alteran nuestro sentido común, pero que son estrictamente válidos dentro de sus reglas de juego. Uno puede interpretar a estas construc-

ciones como ficciones. Ésta es una vieja tradición filosófica que goza del debido respeto. La historia lleva desde la época de H. Vaihinger y su filosofía del 'como si', hasta el ficcionalismo que se ha nutrido fundamentalmente del ámbito de la física contemporánea. Aunque conviene recordar que ya el concepto de masa puntual newtoniana es un buen ejemplo de ficción que sirvió para excelentes modelos funcionales y prácticos en física.

Otro punto que merece atención es que el espacio en el siglo XX se fue transformando en una entidad dinámica. Este es un punto curioso. Ya se observa en Einstein este tránsito conceptual entre sus dos teorías de la relatividad: la restringida y la general. Los historiadores especializados han encontrado numerosas conjeturas e ideas en germen en sus trabajos intermedios. La emergencia de la geometría de Riemann en su obra, aún antes de la covariancia y de sus ecuaciones de campo de noviembre de 1915, es un buen ejemplo de la articulación de sus ideas para representar esta dinámica. Los filósofos han dedicado mucha tinta al período que va desde esta etapa hasta la geometro-dinámica de Wheeler y su influencia hasta la década de 1970. De modo creciente, se fue viendo al espacio como una entidad dinámica. Con mayor precisión, uno debería hablar del espacio tiempo, pero hay sutilezas filosóficas que obligan a hacer una distinción entre estos conceptos, como se intentará mostrar más adelante.

Pero, a pesar de este rostro dinámico, el concepto sigue mostrando fisuras. ¿Dónde están hoy para un físico las fronteras conceptuales del espacio? He aquí algunos ejemplos, aunque expresados a través del concepto de espacio tiempo. La expansión-aceleración del universo es una. Hay una gama de modelos que abordan este gran enigma. La gran explosión que se asocia al universo es otro ejemplo, aunque mucho más especulativo. Otra frontera se encuentra en la naturaleza de los agujeros negros, por su intrínseca conexión con la curvatura del espacio tiempo. Esta frontera está más próxima a la actividad de los científicos. Aunque sigue siendo todavía una actividad altamente especulativa, cuestiones como la detección de las ondas gravitacionales por instrumentos terrestres la hacen más accesible. De paso, para los sociólogos éste es un caso interesante. Es de conocimiento público la gran comunidad de científicos involucrada en su detección, como también ha existido un extenso número de científicos investigando desde 1916 en la intersección entre matemática y física sobre este punto. Ello hizo posible una elaboración adecuada del concepto de onda gravitacional (Kenefick, 2007). Por otra parte, el perfil actual de un agujero negro es el resultado una fusión de matemática, relatividad, astrofísica y algo de física cuántica. Viene tomando forma desde hace varias décadas, con cierta paternidad intelectual debida a Oppenheimer y Snyder en 1939. No obstante, todavía presenta varias lagunas conceptuales importantes. Más adelante se verá que hay numerosos enfoques sobre una eventual teoría cuántica de la gravedad. De allí se desprenden varias versiones de lo que es un agujero negro. Aunque hay un aire de familia entre ellas, también aparecen diferencias específicas considerables. El nivel de detección actual no permite dilucidar todavía entre las diferentes propuestas teó-

rico-especulativas. En este sentido, la entidad aludida en las detecciones de estos últimos años corresponde a una noción muy cercana a la relatividad general de Einstein. Actualmente, se apela a modelos astrofísicos para buscar relevancia en cuanto a la evidencia: actividad en el centro de galaxias, fusión de agujeros negros por simulaciones computacionales y varios programas en relatividad numérica. El agujero negro, por su eventual estructura y por su transición desde una entidad emergente de cálculos matemáticos, hasta un posicionamiento sensible a las prácticas observacionales, ofrece una dinámica conceptual realmente muy atendida para la filosofía de la ciencia.

En los intentos de fusionar las dos grandes ramas de la física actual, los agujeros negros son quizás el laboratorio teórico más importante. La singularidad que eventualmente se encuentra en los mismos, es todavía un terreno de la matemática más que de la física; no hay acceso empírico a ella. Pero el horizonte de eventos de un agujero negro, esa zona de no retorno, ha dividido a los científicos en varios grupos en materia de interpretación y la última década muestra un rica producción de enfoques al respecto. El tema se sitúa en el corazón del espacio tiempo. El agujero negro pasó de ser una entidad secundaria a reubicarse en las fronteras de la investigación como una de alto valor cosmológico; algo similar a lo que le sucedió al cuanto de acción de Planck. Es curioso que aún un escenario tan singular, producto de una concepción del espacio tiempo, sirva para mostrar conflictos teóricos muy difíciles de resolver entre comunidades especializadas.

Con respecto a la trama conceptual entre espacio y tiempo, cabe hacer algunas aclaraciones breves. El punto de vista adoptado aquí se encuentra reflejado en este párrafo de Lucas y Hobson (1990, 1):

La integración del espacio y el tiempo en el espacio-tiempo no ha eliminado la distinción entre lo espacial y lo temporal, sino solamente la afirmación de que ellos son enteramente independientes. [Trad. del autor].

La raíz de esta fusión se encuentra en el conocido trabajo de Einstein de 1905 que dio origen a la teoría de la relatividad especial. Los principios que allí expone son artífices principales de esta idea. El rol de la velocidad de la luz y de las contracciones de Lorentz, que luego pasan conceptualmente a la relatividad general, son centrales aquí. Además, para el enfoque adoptado, parece conveniente sumar un pensamiento del propio Einstein, tomado de Earman (1989, 192):

No se señala [sobre el espacio tiempo] una existencia por sí misma, sino solamente una cualidad estructural del campo. [Trad. del autor].

Por otro lado, observando al mundo experimental de la relatividad general en relación con su protagonismo sobre el concepto de espacio tiempo, vale remarcar algunos puntos relativamente recientes que se suman a los resultados considerados como clásicos. Sólo se atiende aquí a tres casos: el *Gravity Probe B*, el GPS y

las ondas gravitacionales. El primero es un experimento que llevó varias décadas poner en funcionamiento, pero que concluyó exitosamente. Mide dos efectos de curvatura de espacio tiempo cerca de la tierra. Cierta arrastre y cierta torsión. Los resultados concuerdan muy bien con la teoría mencionada. El segundo, como se sabe, es un dispositivo que ya está instalado en los automóviles y en numerosas actividades cotidianas. Pero que requiere, para un uso eficiente, de una corrección provista por la relatividad general. Un reloj en órbita avanza muchos nano-segundos diarios en relación con uno situado en la superficie de la tierra y es necesario realizar esa corrección para ajustar las mediciones de posición. Esto es consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo predicha por esta teoría. Por último, es de destacar el descubrimiento notable de las ondas gravitacionales realizado en 2015, con un impresionante trasfondo tecnológico. La historia de estas últimas décadas refleja un manto de dudas expresadas en diferentes etapas sobre la eventual viabilidad del proyecto relacionado con estas ondas. Es una historia apasionante (Collins, 2004). El punto importante es que cualquier teoría cuántica que pretenda incorporar a la gravedad, tiene que dar cuenta de estos resultados; tarea no fácil, por cierto.

Aún cuando se sigue conservando actualmente una versión dinámica del espacio tiempo, la concepción clásica dependiente de la relatividad general fue erosionada en la primera mitad de la década de 1970. La secuencia de artículos de S. Hawking y J. Bekenstein de esos años dejó ver la importancia de la teoría cuántica en el corazón de un agujero negro clásico. Desde allí, la termodinámica y en particular, la entropía, han permanecido en el rol de primeros actores en los procesos físicos imaginados dentro de este entorno. La filosofía del espacio tiempo acusó el impacto de esto, pero no se repuso inmediatamente. Había por ese entonces una fuerte dependencia de la relatividad general sobre el tema y la física cuántica introdujo otros ingredientes conceptuales ajenos a esta tradición. En general, los filósofos de la ciencia de la época compartían una lectura del tema muy vinculada con una aproximación geométrica. A partir de esta época, la filosofía del espacio tiempo se adaptó a otros modelos físicos especulativos y se trasladó principalmente a las oficinas de los físicos teóricos en varios centros de investigación relevantes. Aquí hay que aclarar que este comentario no hace justicia con las excelentes obras filosóficas que siguieron apareciendo en las décadas posteriores sobre el enfoque clásico y con varias que comenzaron a acercarse a las corrientes conceptuales de la teoría cuántica de campos. Sólo pretende señalarse una tendencia general.

3. Dos vertientes de la física

Una lectura posible de todo esto puede presentarse a través de un diagrama de dos ramas que convergen: una vertiente clásica y una cuántica. Un primer lugar de encuentro fue la teoría cuántica relativista. La obra de Dirac dominó mayormente a la teoría cuántica de campos durante las décadas de 1930 y de

1940. El electrón relativista fue un gran protagonista en los enfoques elaborados y emergieron varias líneas de investigación estrechamente emparentadas con él. Esta unión de física cuántica y relatividad especial llegó hasta el modelo estándar, cuya última coronación fue el descubrimiento reciente del bosón de Higgs. Conviene señalar que esta línea de investigación tuvo varios resultados importantes anteriores, como fueron los hallazgos del gluón en 1971, de los bosones W y Z en 1983, y del quark top en 1995.

Cabe acotar también que en la línea de Dirac, la fusión de física cuántica ordinaria y teoría de campos ha producido otro concepto importante que conviene mencionar, porque puede proyectar un perfil adicional sobre el concepto global de espacio. Se trata del vacío asociado con teorías cuánticas de campo. Hoy se lo conceptúa como una especie de sopa caliente que refleja una actividad inusitada y que es producto de varias teorías emparentadas con propiedades exóticas. Como este artículo no se va a extender sobre el tema, si hay motivación por él, puede consultarse Saunders y Brown (1991) que todavía ofrece varios artículos recomendables para la reflexión filosófica.

Una mirada complementaria al tema, que se estima conveniente incorporar aquí por su valor pedagógico, fue expuesta por J. Polchinski en una conferencia de divulgación relativamente reciente en la TV de la Universidad de California: la relatividad especial se ocupa de lo muy rápido, la relatividad general de lo muy masivo, la mecánica cuántica de lo muy pequeño; la teoría cuántica relativista, de lo muy rápido y lo muy pequeño, con el notable descubrimiento de la antimateria; para lo muy masivo y muy pequeño se requieren condiciones extremas, como las colisiones de partículas de altas energías, o las singularidades en el espacio tiempo, o quizás por extensión, contextos especiales, como el *Big Bang*. Con respecto a las colisiones entre partículas, aunque han tenido sus éxitos notables, hasta el momento también dejan sus incógnitas: no se han encontrado todavía las super-simetrías, los agujeros negros pequeños, ni algunas de las otras rarezas predichas por los modelos conocidos. De cualquier modo, hay un consenso mayoritario en cuanto a la fertilidad del abordaje experimental por estos medios. Además, aunque es frecuente la emergencia de artículos que aluden a los primeros momentos del universo, y aunque se pueda estimar que la gran explosión será un tema de importancia creciente en el futuro, ella impresiona todavía como una línea de investigación relativamente vaga. La intrincada red de criterios y supuestos cosmológicos hace todavía hoy muy incierto su abordaje. Los órdenes de magnitud juegan un rol importante en esta vaguedad. Hay cierto acuerdo en que la física cuántica, tal como está escrita actualmente, no alcanza para describir adecuadamente la gran explosión. Pero la relatividad general tampoco llega hasta allí con la precisión deseada. Para este objetivo, hace falta bastante más que modelos aislados.

4. Aproximación a la no localidad

La física cuántica es famosa entre científicos y filósofos por su producción de rarezas. Un tema que ha sido muy tenido en cuenta por los filósofos desde 1935 es la no localidad. Han corrido ríos de tinta sobre las cuestiones filosóficas de la mecánica cuántica ordinaria —en realidad, deberíamos decir ‘extraordinaria’—, aunque este flujo de trabajos decae enormemente cuando se incursiona en la producción sobre cuestiones filosóficas de la teoría cuántica de campos. La no localidad ha sido desde esa época un terreno activo de investigación filosófica y desde hace algunas décadas éste se ha visto acompañado por una creciente actividad experimental. Aquí, más que a la mecánica cuántica debe aludirse a la física cuántica, porque la óptica en este dominio ha tenido desarrollos notables. Los experimentos sobre la no localidad están vinculados con la nano-tecnología y eso requiere abordajes epistemológicos renovados. Los qubits y la computación cuántica en los laboratorios, el entrelazamiento, o la teleportación, son prueba elocuente de ello. Históricamente, desde el argumento EPR y los puntos de vista de Schrödinger hasta Bohm y Bell, hay una primera etapa; desde estos últimos hasta el experimento de Aspect de comienzos de la década de 1980, una segunda; desde allí hasta hoy, una tercera. Además, la acción a distancia tiene hoy que ver con correlaciones y con probabilidades; con lo que algunos llaman ‘no separabilidad’ y otros ‘no localidad’. La opinión común sobre la acción a distancia es, a grandes rasgos, heredera de esta frase de Newton (2004, 102) y refleja un punto de vista bastante generalizado:

Que un cuerpo pueda actuar sobre otro a una distancia a través del vacío, sin la mediación de alguna otra cosa a través de la cual su acción y fuerza puedan transmitirse de uno a otro, es para mí un absurdo tan grande que creo que ningún hombre que tenga una facultad competente en tópicos filosóficos puede alguna vez caer en ello”. [Trad. del autor].

Aún cuando la no localidad actual muestre un gran contraste con este enfoque, su estatuto epistémico es diferente. No se encuentran acciones. Sólo correlaciones. La idea einsteniana de acción fantasmal a distancia no se desprende de la física actual. Como dijera Ch. Bennett, un científico idóneo en el tópico, “es fantasmal, pero no es acción a distancia” (citado en Siegfried 2014). Esto hace al mundo de la no localidad extraordinariamente extraño². Por otra parte, desde hace varias décadas se vienen explorando las posibles relaciones entre no localidad y relatividad, como puede apreciarse en Maudlin (2002). Esto ha producido un exuberante conjunto de modelos, los que posiblemente reflejen más

² Para una introducción reciente, actualizada y amena, ver Musser (2015).

ignorancia que aciertos: se intenta, por ejemplo, cambiar la definición de probabilidad, re-definir la causación, etc. Éstos son productos típicos de comunidades teórico-especulativas.

Otra comunidad que aporta su perspectiva es la de los experimentalistas. La actividad experimental crece a pasos agigantados, y con ella, también las preguntas. ¿No será que todavía queda algún presupuesto, o laguna, en los experimentos sobre la no localidad, lo que conduce a interpretaciones sesgadas? Técnicamente, se los conoce como *loopholes* y se ha hecho un gran esfuerzo experimental para dar cuenta de ellos³. Numerosos laboratorios en el mundo están trabajando sobre cómo controlar esas posibles escapatorias. Recientemente, los resultados conjuntos de los laboratorios del NIST en Estados Unidos, de un grupo especializado en Viena y de otro grupo en Delft, Holanda, parecen haber logrado erradicar los *loopholes* más significativos; esto, hasta donde es posible hacerlo. Cabe acotar al respecto que los filósofos han aprendido hace tiempo a mantener cierta cautela sobre cuestiones epistemológicas relacionadas con la experimentación. De todos modos, hay que reconocer que se está produciendo una catarata de resultados experimentales: con fotones, con espines, con multi-partículas, con neutrinos, con luz proveniente de estrellas, con física del estado sólido.

Estos resultados van afirmando en las comunidades especializadas la convicción acerca de la vigencia de la no localidad. El entrelazamiento —la vieja idea de Schrödinger de 1935— parece ser el principal responsable de esta situación, aunque hoy en día, la relación entre entrelazamiento y no localidad no es del todo clara. Para él, el entrelazamiento era la propiedad esencial de la física cuántica. Además, vale decir que el entrelazamiento está intrínsecamente vinculado con el lenguaje de esta teoría. Cuando un investigador se aproxima a este lenguaje, percibe de algún modo que el concepto clásico de espacio se va diluyendo en sus construcciones. Los físicos interesados en la historia de esta teoría, notan el protagonismo de las matrices, de lo discontinuo, de los espacios de Hilbert. El álgebra lineal despliega un protagonismo muy fuerte, aunque éste dista mucho de ser trivial y los historiadores de la matemática han encontrado varias tramas de gran riqueza conceptual dentro de este ámbito. En cualquier caso, para entender el entrelazamiento hay que entender el producto interno, el producto de tensores y otras cuestiones. Además, para entender filosóficamente el espacio de Hilbert, hay que conocer la historia del análisis funcional. Sin esta historia, no se ve claramente la diferencia entre un espacio de Hilbert y, por decir, un espacio de Banach. Por supuesto, el físico con orientación matemática sabe por qué se queda en un espacio de Hilbert para la física cuántica. Hay teoremas, sumados a ciertas representaciones, que habilitan su uso; además, la naturaleza parece funcionar extraordinariamente bien con estas representaciones, vía Hilbert. Generalmente, el físico aquí toma al constructo teórico como una herramienta para los fines de poder realizar cálculos exitosos.

³ Para un panorama actualizado, ver Giustina (2017).

Otro punto digno de mención es el lenguaje de los números complejos. No es posible seguir a la física cuántica sin estas estructuras. La cuántica da hoy buenas razones para aceptar que el complejo es el número 'elegido' por la naturaleza.

Para el entrelazamiento, es esencial. No alcanzan los reales. En esto, parece tener razón Penrose, quien ha sido un fuerte defensor de estas estructuras para el lenguaje de la naturaleza. Como es sabido, hay otras extensiones, como los cuaterniones, los octoniones; pero hasta donde es posible apreciar, la naturaleza ha elegido a los complejos. Quizás esto no sea tan raro, porque es un cuerpo cerrado y porque ellos dan un lenguaje con una capacidad expresiva que no tienen los números reales.

Cambiando el eje de análisis lingüístico, la probabilidad en física cuántica es otro gran tema, aunque no se considerará aquí en detalle. A la probabilidad se la ha considerado desde varias vertientes filosóficas. Se la puede leer desde el bayesianismo, desde variantes de Ramsey, de De Finetti, de von Mises, desde la versión de Popper, o de Savage, o desde varias más; pero quizás, como se supo decir, no hay que mirar tanto a las probabilidades en cuántica, como a las amplitudes.

Más allá de las interpretaciones, estos son ingredientes básicos del lenguaje de la teoría cuántica actual, y cuestiones como el entrelazamiento no pueden seguirse claramente sin ellos. La opción de la caja negra no es la más atractiva frente a la posibilidad de entender algo del juego. De todos modos, la dinámica teórica que conduce desde la teoría ordinaria a la teoría cuántica de campos, también muestra un rasgo interesante en relación con el entrelazamiento. Aquí ya no se pregunta tanto si existirá la no localidad, como acerca de las posibilidades de medirla, y se han elaborado varias nociones de medida al respecto. De acuerdo con la medida va a perfilarse el modelo que uno elige. Hay aquí herencia de von Neumann y de otros en relación con las medidas. A título ejemplo de la dinámica actual sobre el tema, dos investigadores conocidos por aportes teóricos previos en este ámbito, Rangamani y Takayanagi (2017), acaban de publicar todo un libro sobre un tipo particular de medida de entrelazamiento. Esto habla naturalmente de la riqueza de producción sobre el tema.

El ámbito puede conceptualizarse como física especulativa, pero lo escrito es altamente técnico y riguroso. Esto está emparentado con ciertas consideraciones epistemológicas actuales que merecen un párrafo aparte. Se ha reflatado el tema de los criterios de científicidad, y en particular, su aplicación para el ámbito de la teoría de cuerdas. El libro de Dawid (2013) es un ejemplo. También lo son varias reuniones motivadas por esto. En realidad, es difícil establecer criterios claros de científicidad sobre estas construcciones. Ellas impresionan por su rigor, pero también por su grado de especulación y por su escaso, o nulo, contacto con lo empírico. Lo que sucede es que en muchos casos, estas construcciones son grandes generadoras de heurísticas. Parece que esto vale en un contexto de búsqueda. La historia de la física en el siglo pasado exhibe buenos ejemplos de aventuras especulativas guiadas por sólida matemática y, como le sucedió a Einstein alrede-

dor de 1908, el excesivo apego por lo empírico no siempre es un buen consejero. Por ello, no convencen del todo muchos argumentos esgrimidos por los grandes críticos de las cuerdas. Aceptando que consistencia no implica verdad y aceptando también los valores epistémicos de lo empírico, no por ello conviene cercenar las ideas expresadas en un excesivo lenguaje matemático. A veces la física se ha adelantado a las matemáticas y en otras ocasiones ha sucedido al revés.

5. Hacia una gravedad cuántica

Por su incidencia sobre el concepto de espacio, los diferentes enfoques sobre gravedad cuántica merecen unos párrafos especiales. Es de rigor comenzar por la búsqueda de Einstein de varias décadas. Ya en junio de 1916, en un trabajo en el que aparecía una primera versión de una fórmula que ha sido crucial para la comprensión de las ondas gravitacionales —la fórmula cuadrupolar—, se preguntaba al pasar por el lugar de la física cuántica en su enfoque (Einstein, 1916). Esta pregunta lo acompañó hasta sus últimos días. Los historiadores han explorado cada uno de los pasos que dio este científico a lo largo de los años, hasta su teoría del campo unificado. Lo que queda en claro luego de estas investigaciones es que el perfil de su búsqueda estuvo totalmente marcado por vaivenes de ensayo y error. No es el lugar para entrar en esa hermosa aventura, pero se sugiere ver, por ejemplo, Van Dongen (2010).

Un segundo enfoque, aunque es el que más físicos teóricos ha atraído, es el programa de investigación sobre las cuerdas, que continúa vigente y con mucha vitalidad. El número de protagonistas activos hoy avala este comentario. Hay varios centros que concentran referentes importantes de esta corriente. Es un enfoque ambicioso en cuanto a sus pretensiones, pero mucho de lo realizado ha girado en torno de diez u once dimensiones, o espacios que no condicen de modo directo con lo que se observa. De todos modos, se trata de un programa robusto que ha logrado en cierto modo incorporar a la gravedad en su formalización, aunque al precio de no tener contacto estrecho con la experimentación. En el desarrollo de este programa se han producido aportes significativos para la articulación de áreas en principio desconectadas. Conjeturas, como la de J. Maldacena (1997), han revitalizado numerosos sectores de esa línea y de otras cercanas. En el año 2015, este trabajo ya había superado las 10.000 citas, lo que sin dudas habla de su fuerte impacto en el medio.

Esta conjetura también se llama AdS/CFT y las siglas se refieren a un espacio anti- de Sitter y a una teoría cuántica de campo conforme. La historia de las relaciones entre de Sitter y Einstein está bien narrada; ver Kerszberg (1989). Así mismo, la trama conceptual de los modelos de Sitter y anti de Sitter puede seguirse en Hawking y Ellis (1973). Por otra parte, un lector interesado en CFT puede hacer una primera aproximación por medio de Hubeny (2015); otro extenso trabajo reciente de valor pedagógico y epistemológico de la dualidad

AdS/ CFT es De Haro *et al.* (2016). En este trabajo, uno de sus co-autores es un filósofo de la física. La descripción detallada de la correspondencia AdS/CFT escapa a las pretensiones de este trabajo. En este sentido, las últimas referencias sólo pretenden ilustrar algunas de las múltiples líneas expositivas como posibles guías para lecturas ulteriores. Pero sí se desea usar este marco para hacer un comentario. El éxito de esta conjetura se debió principalmente a que ofrece un modo de pasar de un ámbito de N dimensiones a uno de $N-1$ dimensiones. Un ejemplo muy usado para expresarla ha sido el tránsito de tres a dos dimensiones. Esta reducción dimensional fue originalmente propuesta por G. 't'Hooft (1993) de un modo que hoy se consideraría algo vago, aunque allí apareció en escena el llamado 'principio holográfico' —nombre acuñado por su similitud con un holograma— por el cual, por decir, una física en tres dimensiones puede derivarse de otro lenguaje a partir de dos dimensiones; Susskind la transcribió al poco tiempo a la teoría de cuerdas y luego el trabajo citado de Maldacena consiguió introducirla de una manera más precisa dentro de esa corriente de la física teórica. A los pocos meses, varios físicos mejoraron la versión de la conjetura y ahora hay una activa corriente de investigación que intenta elaborar una suerte de diccionario para traducir la física desde un contexto teórico al otro. Parcialmente por eso se la conceptualiza como una dualidad. En el ambiente especializado, se suele expresar también como la relación '*bulk-boundary*'. Esto, como es de imaginar, ha producido una gama bastante grande de interpretaciones sobre las equivalencias entre los dos lenguajes.

Influido por esta conjetura, Van Raamsdonk ha elaborado en estos últimos años una serie de trabajos que pretenden sugerir que el espacio tiempo clásico es consecuencia de algún modo del entrelazamiento cuántico. Para este desarrollo, conviene ver un extenso trabajo reciente de este científico (Van Raamsdonk, 2016). Este punto de vista fue considerado muy osado y fue rechazado al comienzo, pero luego se fue incorporando en una comunidad que pretende encontrar vínculos entre dominios de la teoría cuántica y de la relatividad general. Se insinúa que el espacio tiempo podría surgir del entrelazamiento. Una nueva línea de abordaje provista de considerable originalidad.

Un último eslabón de esta corriente es la conjetura ER = EPR, que establece una relación fuerte entre la solución de las ecuaciones de campo de la relatividad general, conocida como de Einstein-Rosen, de 1935, y el famoso trabajo EPR de Einstein, Podolsky y Rosen del mismo año, pero orientado hacia cuestiones conceptuales de los fundamentos de la mecánica cuántica. Estos dos mundos han resultado en general, muy alejados; por ello, estas conjeturas aportan bastante vitalidad al campo de las teorías unificadas, aunque sea de un modo tan extraño. La conjetura ER= EPR fue sugerida por Maldacena a Susskind, y ambos la elaboraron en un trabajo posterior (Maldacena y Susskind, 2013). Este abordaje presenta considerable originalidad y gran imaginación. A través de ella, se relaciona de manera fuerte a la física de los agujeros negros con estos aspectos intrigantes de la teoría cuántica. Es una zona de física especulativa por excelencia, pero está

estimulando a numerosos físicos, a pesar de la corta edad de la conjetura. Es necesario decir que aquí se está realmente lejos de una física consolidada, pero causa una grata impresión ver esta capacidad de imaginación al servicio de la búsqueda de respuesta a ciertos interrogantes fundamentales. Una comparación sugiere que la conjetura original de Maldacena de 1997 es mucho más robusta y ya ha mostrado tentáculos en varios sectores de la física teórica.

Cabe decir que la actividad sobre estas conjeturas puede seguirse a través de fuentes de información como arXiv, o de varios foros sobre el tema. De paso, esta dinámica de producción sirve para entender mejor la relación entre ellas. Por allí se aprecian niveles de conjeturas; esto es, cierta estratificación. Esto recuerda a la famosa frase atribuida al poeta griego Arquíloco: “muchas cosas sabe la zorra; pero el erizo, una sola, y ella es grande” Molina (2011, 131). Esto fue rescatado de un modo interesante por el matemático B. Mazur, quien en su momento prestó atención a la jerarquía e importancia de las conjeturas dentro de la matemática (Mazur, 1997). Con respecto a la física teórica, también se puede decir que de vez en cuando aparece una jerarquía de conjeturas y que esto es parte de la aventura especulativa aceptada por muchos científicos.

Es conveniente dedicar también un párrafo a otros enfoques sobre la gravedad cuántica, porque proyectan de manera directa o indirecta modelos de espacio, o sugerencias sobre el espacio tiempo. Algunas obras se han ocupado extensamente del tema (Oriti, 2009). Naturalmente, no todos los investigadores comulgan con el enfoque de las cuerdas. A la gravedad einsteniana también se la ha intentado extender hacia consideraciones cuánticas. La literatura sobre el punto tiene varias décadas, pero el enfoque más notable es el de la representación de bucles (*loops*) de la gravedad cuántica. El libro de Rovelli (2004), aunque no es de divulgación, es otra buena referencia. La corriente iniciada por A. Ashtekar y varios jóvenes hace algunas décadas tiene todavía hoy considerable fortaleza. Para ver su evolución, se puede consultar Ashtekar y Pullin (2017), quienes encabezan una mirada a los primeros 30 años de ella. Lateralmente, aportes recientes dentro de esta línea dan su lectura de los agujeros negros desde esta perspectiva, como puede apreciarse en Pérez (2017).

Es necesario decir que existe un conjunto de corrientes de abordaje que tienen su peso propio, aunque están elaboradas desde diferentes supuestos: las torsiones (*twistors*), propuestas por R. Penrose (1967) y desarrolladas por él y sus colaboradores; la geometría no conmutativa, que tiene a A. Connes (2005) como principal referente; los nudos, al estilo de Baez (1994); a éstas se suman varias líneas más, como la gravedad asintóticamente segura, los conjuntos causales, la triangulación dinámica. La lista podría extenderse, pero no es el objetivo de este trabajo entrar en estos detalles. Cabe mencionar sí, que también se ha hecho algún intento de comparar estos enfoques entre sí por medio de la cosmología (Barrau,

2017). En alguna corriente, como en la teoría de los conjuntos causales, puede apreciarse la influencia de algún filósofo, como fue el caso de D. Malament con un trabajo temprano que fue usado luego de modo más general.

Las líneas de investigación mencionadas tienen numerosos puntos de contacto, lo que ha permitido en algunos casos extender considerablemente sus dominios. Por ejemplo, los *twistors* con las cuerdas, o la geometría no conmutativa con el enfoque de los *loops*. Estos cruzamientos, a veces inesperados, han permitido generar cierto optimismo respecto de la búsqueda global. Algo valioso parece haber allí. Aunque todo esto refleje una inmensa zona de tinieblas, también muestra la fuerza exhibida por las exploraciones teórico-especulativas. Además, hasta dónde es posible apreciar este frondoso paisaje, también hay zonas de una peculiar belleza. Pero es la naturaleza la que dirá la última palabra, si es que algunas de estas líneas pueden ser chequeadas convincentemente algún día. Los cien años de esta pequeña historia dejan los pronósticos en suspenso.

6. El juego de las dimensiones

Antes de hacer algunos comentarios finales, merece comentarse una cuestión adicional. Uno de los ingredientes que está afectando a la imagen del espacio es el concepto de dimensión. Ehrenfest ya se preguntaba hace un siglo por qué el espacio en el mundo físico tiene tres dimensiones. Luego la especulación guiada por la matemática extendió el campo a N , con N mayor que tres. Esto estimuló el recurso de las dimensiones enrolladas y aparecieron los modelos tipo Kaluza-Klein para intentar justificar por qué no se perciben esas otras dimensiones. Por otro lado, cada dimensión fue consolidándose como un protagonista importante. El caso más notable actualmente es el de la dimensión dos. Luego del descubrimiento del efecto Hall cuántico por von Klitzing en 1980, la física de dos dimensiones ha crecido extraordinariamente. Un par de décadas después, este mismo científico miraba con asombro una producción de más de 6.000 trabajos especializados sobre el tema. Vale decir que la misma ha seguido creciendo hasta hoy, con varios premios Nobel y una fuerte incursión en la nano-tecnología, especialmente del grafeno. Para una breve aproximación al tema, ver Rodríguez (2013).

Para los matemáticos, la dimensión cuatro ha mostrado características inusitadas en lo referido a las estructuras que puede soportar y que la hacen claramente diferente de las otras. Es un dominio técnico y conceptual que escapa a los propósitos de este trabajo, pero es muy atractivo por lo exótico del caso. Desde hace varias décadas se han generado especulaciones sobre su eventual protagonismo en física. A modo de ilustración; ver Brans (1994). La fauna de construcciones ha llegado en la actualidad hasta un extremo prácticamente irreconocible, con dimensiones fractales, o aún negativas. En un terreno más cercano al tema desarrollado en este trabajo, también se ha explorado el alcance de las dimensiones complejas (Calcagni, 2017). Aún para los propios matemáticos, se trata de un

profundo campo de investigación, como puede apreciarse en Manin (2005). Para un físico interesado en el tema, normalmente las construcciones no necesitan mucho más que aquello expuesto en Hurewicz-Wallman (1941). La dimensión está bien definida hasta la confortable región de los espacios métricos. Los tratamientos más generalizados, al estilo de Nagata (1983), aparentemente no han resultado tan necesarios para la física.

Lo que sí ha producido la física es la llamativa sugerencia de que, bajo ciertas condiciones, se puede establecer una equivalencia entre una dimensión y otra menor, como lo ejemplifica la conjetura AdS/CFT. Muchos especialistas están usando esta estrategia para hacer cálculos en la dimensión menor —ya que allí es posible hacerlos—, y extender los resultados a la mayor por medio de esta conjetura. Ésta es, en parte, la razón del éxito de la misma, aunque no quede todavía en claro si el principio holográfico es una adecuada herramienta conceptual para describir el universo. Una lectura histórica de esto lleva a los trabajos de Bekenstein y Hawking ya mencionados, porque allí se encontró que en los agujeros negros, la entropía está vinculada con el área y no con el volumen. Parece que aquí está en gran medida el germen de estas ideas. En cualquier caso, la reducción dimensional ofrece una perspectiva atractiva para responder a la pregunta sobre si la dimensión puede ser también considerada como una variable dinámica. Existe mucha especulación actualmente (Carlip, 2017), pero hay un claro contraste con lo que normalmente se ha expuesto en la tradición filosófica anterior sobre el espacio tiempo. En ella, varios textos comienzan con: «Sea una variedad 4-dimensional...». En última instancia, en el tránsito de la matemática a la física, estos cambios conceptuales afectan también a la noción de invariante, y éste es un punto que merece su debida atención filosófica.

7. Comentarios finales

A modo de conclusión, puede decirse que el enfoque presentado en relación con el concepto de espacio sugiere que el mismo está en plena etapa de construcción y que es altamente sensible a la red disciplinar históricamente involucrada en cada época. También debe señalarse que han cobrado nueva fuerza los argumentos que apuntan a una concepción del mismo como emergente, pero sigue la intriga acerca de lo que se considera más fundamental. ¿Emergente de qué? Hay aventuras intelectuales motivadas por esto, como la de Cao et al. (2016). La producción de las últimas décadas exhibe nuevos métodos y nuevos marcos conceptuales, pero no siempre convencen sus logros. Además, en la física cuántica se han desarrollado variadas lecturas del entrelazamiento y de la no localidad; los ejemplos llegan hasta la consideración de esta última como un axioma. Hay muchas decenas de trabajos con diferente tonalidad. En cualquier caso, la aceptación de la no localidad como parte de la descripción del mundo físico es una cuestión, y su significado es otra. La búsqueda del mismo ha costado mucho esfuerzo durante más de ocho décadas. Todavía quedan dudas acerca de si se trata de algo

regional, o si es algo general e inherente al gran enigma del cosmos. Su estatuto epistémico ha ido variando, al mismo tiempo que se ha ido consolidando su inserción en una gama considerable de fenómenos. Hoy es más familiar y quizás llegue a incorporarse en alguna actividad cotidiana, como fue lo que sucedió con el GPS mencionado antes; de algún modo ya hay indicios de eso. De cualquier manera, su extraño perfil conceptual genera un gigantesco desafío para la imaginación humana. Es cierto que uno más, pero hasta el momento se sitúa como un fuerte elemento motivador de muchos científicos y filósofos.

Lo que motivó este trabajo fueron las conexiones sugeridas entre este extraño mundo de la no localidad, por un lado, y la textura teórica producida por la imagen del espacio tiempo proveniente de la relatividad general, con todo su aire local, por el otro. El estado del arte refleja que no está dicha la última palabra sobre ello. Quizás un futuro cercano o lejano depare nuevas sorpresas, o nuevos modos de entendimiento, como sucedió con la noción de campo. Aquí conviene no olvidar a la historia. De algún modo, Grassmann (1947) sigue vigente, aunque su obra haya sido escrita en la segunda mitad del siglo XIX. Varios especialistas, como Fearnley-Sander (1979) entre otros, han intentado rescatar del anonimato esta vigencia. Como ejemplo actual, hay que destacar que sus grassmannianos están golpeando las puertas de una comunidad de físicos que ha logrado merecido prestigio por haber simplificado cálculos notables en dominios sofisticados de la física cuántica de campos y de partículas elementales, como puede verse en Arkani-Hamed et al. (2016). Como corolario, desde allí también se está haciendo una lectura fuertemente crítica del concepto de espacio tiempo establecido.

De todos modos, el ámbito de indagaciones expuesto permite interpretar como plenamente vigentes a los vaivenes entre el álgebra y la geometría en relación con el mundo físico; en particular, con el concepto de espacio. Todo lleva a pensar que la tensión entre la extensión espacial, con su indómita continuidad, y la lectura conceptual de las estructuras discretas que exhibe el cosmos, va a convivir con las reflexiones filosóficas por mucho tiempo.

Referencias bibliográficas

- Arkani-Hamed, N., Boujaily, J., Cachazo, F., Goncharov, A., Postnikov, A., Trnka, J. (2016). *Grassmannian geometry of scattering amplitudes*. Cambridge: Cambridge U. P.
- Ashtekar A., Pullin, J. (eds.) (2017). The Overview Chapter in Loop Quantum Gravity: The First 30 Years, en *Loop Quantum Gravity. The first 30 years*. World Scientific. New Jersey.
- Baez, J. (ed.) (1994). *Knots and Quantum Gravity*. Oxford: Clarendon Press.
- Barrau, A. (2017). Testing different approaches to quantum gravity with cosmology: An overview. *arXiv: 1705.01597v1 [gr-qc]*.

- Brans, C. (1994). Exotic smoothness and physics. *J. Math. Phys.* 35 (10).
- Calcagni, G. (2017). Complex dimensions and their observability. *arXiv: 1705.01619v1 [gr-qc]*.
- Cao, C., Carroll, S., Michalakis, S. (2016). Space from Hilbert Space: Recovering Geometry from Bulk Entanglement. *CALT 2016-15. arXiv: 1606.08444v3 [hep-th]*.
- Carlip, S. (2017). Dimension and Dimensional Reduction in Quantum Gravity. *arXiv: 1705.05417v1 [gr-qc]*.
- Collins, H. (2004). *Gravity's Shadow. The Search for Gravitational Waves*. Chicago: University of Chicago Press.
- Connes, A. (2008). *Géométrie Non Commutative*. Paris. Dunod.
- Connes, A. (2012). On the fine structure of spacetime. En Majid, S. (ed.), *On Space and Time*. Cambridge: Cambridge U. P.
- Connes, A., Marcolli, M. (2008). *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*. New Delhi: AMS. Hidustan Book Agency.
- Dawid, R. (2013). *String theory and the scientific method*. Cambridge: Cambridge U. P.
- De Haro, S., Mayerson, D., Butterfield, J. (2016). Conceptual Aspects of Gauge/Gravity Duality. *Found Phys* 46: 1381-1425.
- Earman, J. (1989). *World Enough and Space-Time*. Cambridge, Mass: The MIT Press.
- Einstein, A. (1916). Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation. Traducido en: Engel, A., Translator; Schucking E., Consultant: *The Collected Papers of Albert Einstein, Vol. 6: The Berlin Years: Writings, 1914-1917*, 1997. New Jersey: Princeton U. P.
- Fearnley-Sander, D. (1979). Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra. *Am. Math. Monthly* 86, 809-817.
- Gauss, C. (1900). *Werke Vol. III*. Leipzig: Teubner. (carta a Bessel de 1830).
- Giustina, M. (2017). On Loopholes and Experiments. En R. Bertlmann and A. Zeilinger (eds), *Quantum [Un]Speakables II. Half a Century of Bell's Theorem*. The Frontiers Collection. Cham: Springer.
- Grassmann, H. (1947). *Teoría de la Extensión*. Buenos Aires: Espasa-Calpe.
- Hawking, S., Ellis, G. (1973). *The large scale structure of space-time*. New York: Cambridge U. P.

- Hubeny, V. (2015). The AdS/CFT Correspondence. *arXiv: 1501.00007v2 [gr-qc]*.
- Hurewicz, W., Wallman, H. (1941). *Dimension Theory*. Princeton: Princeton Math. Series.
- James, I. (ed.) (1999). *History of Topology*. New York: Elsevier.
- Kennefick, D. (2007). *Traveling at the speed of thought: Einstein and the Quest for Gravitational Waves*. Princeton: Princeton U. P.
- Kerszberg, P. (1989). *The Invented Universe*. Oxford: Clarendon Press.
- Lucas, J., Hobson, P. (1990). *Spacetime and electromagnetism*. New York: Oxford U. P.
- Maldacena, J. (1997). The Large N Limit of Superconformal field and supergravity. *hep-th/9711200 HUTP-97/A097*.
- Maldacena, J., Susskind L. (2013). Cool horizons for entangled black holes. *arXiv: 1306.0533v2 [hep-th]*.
- Manin, Y. (2005). The notion of dimension in geometry and algebra. *arXiv: math/0502016v1 [math.AG]*.
- Maudlin, T. (2002). *Quantum Non-Localisity and Relativity*. Second edition. Oxford: Blackwell Pub.
- Mazur, B. (1997). Conjecture. *Synthese*, 111, 197-210.
- Molina, J. (2011). Fragmentos de Arquíloco. México: Textofilia S.C., Colección Ión.
- Musser, G. (2015). *Spooky Action at a Distance*. New York: Scientific American/Farrar, Straus and Giroux.
- Nagata, J. (1983). *Modern Dimension Theory*. Berlin: Heldermann Verlag.
- Newton, I. (2004). Isaac Newton: *Philosophical Writings*. Ed. A. Janiak. Cambridge: Cambridge U. P.
- Oriti, D. (ed.) (2009). *Approaches to Quantum Gravity*. Cambridge: Cambridge U. P.
- Penrose, R. (1967). Twistor Algebra. *J. of Math. Physics*, 8 (2), 345.
- Pérez, A. (2017). Black Holes in Loop Quantum Gravity. *arXiv: 1703.09149v1 [gr-qc]*.
- Rodríguez, V. (2013). El efecto Hall y sus contextos. *Scientiae Studia* 11(1). San Pablo, Brasil.
- Rovelli, C. (2004). *Quantum Gravity*. Cambridge: Cambridge U. P.

- Rangamani, M., Takayanagi, T. (2017). *Holographic Entanglement Entropy*. Cham: Springer.
- Saunders, S., Brown H. (eds.) (1991). *The Philosophy of Vacuum*. Oxford: Clarendon Press.
- Siegfried, T. (2014). Einstein was wrong about spooky quantum entanglement. *ScienceNews* (On line), Feb. 19.
- 't Hooft, G. (1993). Dimensional reduction in quantum gravity. *THU-93/26.gr-qc/9310026*.
- Van Dongen, J. (2010). *Einstein's Unification*. New York: Cambridge U. P.
- Van Raamsdonk, M. (2016). Lectures on Gravity and Entanglement. *arXiv:1609.00026v1 [hep-th]*.
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford: Oxford U. P.
- Yau, S.-T. (2010). *The Shape of Inner Space*. New York: Perseus Books Group.